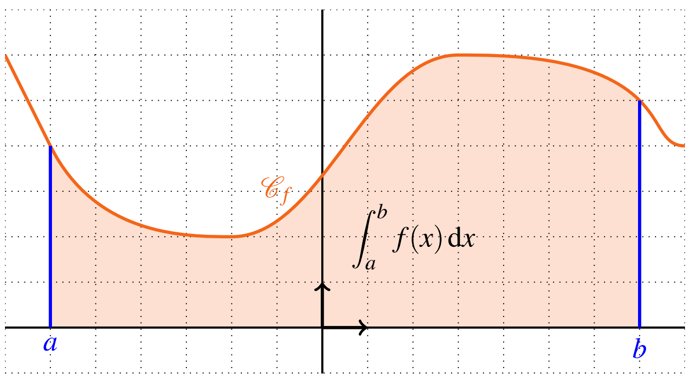
1. Cours : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1 : On considère un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.
On appelle unité d'aire du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'aire du rectangle $OIKJ$.

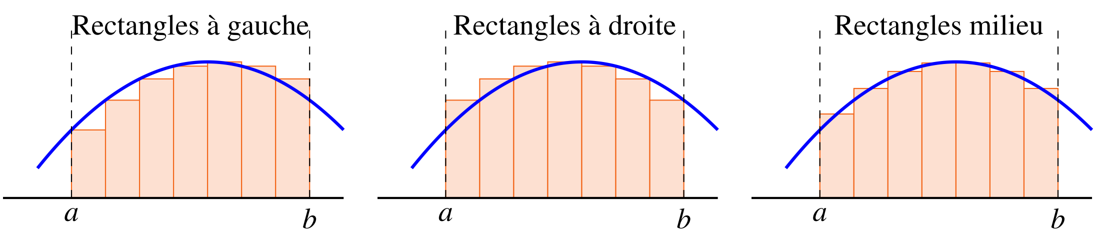
Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Définition 2 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aires se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de a à b.

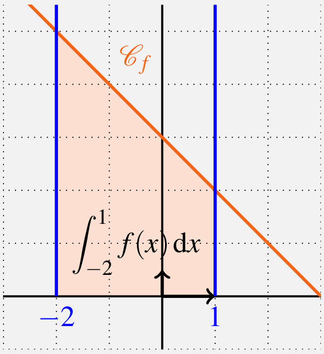


■ **Exemple 1 :** Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieur ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.
On a alors $44 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 61$. ■

La notation de l'intégrale est due à Leibniz : pour calculer l'aire sous une courbe, Leibniz l'approchait par des rectangles de largeur de plus en plus petite. La hauteur des rectangles en x était $f(x)$ et leur largeur, notée $\mathrm{d}x$, se rapprochait de 0 : on faisait donc la somme des $f(x)\,\mathrm{d}x$ entre a et b. Le symbole $\int$ de l'intégrale n'est autre qu'un S allongé qui signifie justement "somme".



■ **Exemple 2 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 6 - 2x$. On cherche la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Pour tout réel $x \in [-2;1]$, on a bien $f(x) \geqslant 0$.

Le polygone délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$ est un trapèze.

L'aire d'un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur b et B et dont la hauteur vaut h est de $\dfrac{(B+b)h}{2}$.

Ici, on a $B = f(-2) = 10$, $b = f(1) = 4$ et $h = 1 - (-2) = 3$.

Ainsi,

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(10+4)\times 3}{2} = 21.$$

■

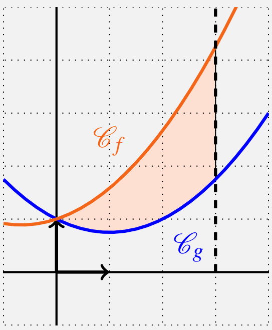
Propriété 1 : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

On suppose que pour tout réel $x \in [a,b]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes de f et de g ainsi les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{3} + 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 1$.
On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de f et g entre les abscisses 0 et 3.



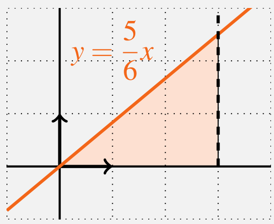
Pour tout réel $x \in [0;3]$, on a

$$f(x) - g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1\right) = \frac{5x}{6}.$$

Cette quantité est positive sur $[0;3]$, L'aire entre la courbe de f et celle de g entre les abscisses 0 et 3 vaut donc $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{6}x\,\mathrm{d}x$.

Or, cette intégrale correspond à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur 3 et la hauteur associée vaut $\dfrac{5}{6} \times 3$ soit $\dfrac{5}{2}$.

Cette aire vaut $\dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{5}{2}$, soit $\dfrac{15}{4}$.



Ainsi, l'aire entre les courbes de f et de g entre les abscisses 0 et 3 vaut $\dfrac{15}{4}$ unités d'aire.

■

2 Intégrale et primitives

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 : f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

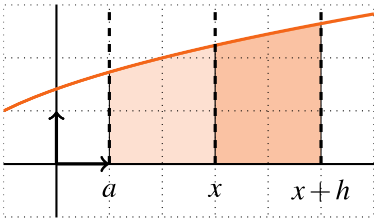
En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

Démonstration 2 : On se contente de démontrer le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$.

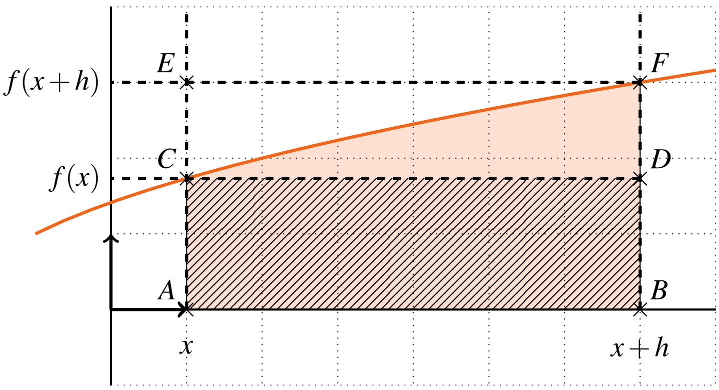
Soit $x \in [a,b[$ et h un réel strictement positif tel que $x+h \in [a,b]$.

$F_a(x+h) - F_a(x)$ représente l'aire sous la courbe de f entre a et $x+h$ à laquelle on retire l'aire sous la courbe de f entre a et x. C'est donc l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.

Ainsi, $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.



On considère les points $A(x,0)$, $B(x+h,0)$, $C(x,f(x))$, $D(x+h,f(x))$, $E(x,f(x+h))$ et $F(x+h,f(x+h))$.



La fonction f étant strictement croissante, l'aire $\int_x^{x+h} f(t)dt$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABDC$, qui vaut $h \times f(x)$ et l'aire du rectangle $ABFE$ qui vaut $h \times f(x+h)$.

Ainsi, $hf(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant hf(x+h)$. En divisant par h strictement positif, on a alors

$$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Or, f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{h \to 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

On raisonne de la même manière pour $x \in]a;b]$ et $h < 0$. On a donc $\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

La fonction F_a est dérivable en x et $F_a'(x) = f(x)$. Ce raisonnement vaut pour tout $x \in [a,b]$: F_a est une primitive de f sur $[a,b]$.

Par ailleurs, $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. □

Définition 3 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On note également $[F(x)]_a^b$.

Démonstration 3 : On considère la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. On rappelle que cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Soit F une autre primitive de f sur $[a,b]$. Les primitives de f sur $[a,b]$ ne variant que par une constante, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $F_a(x) = F(x) + k$.

Or, on sait que $F_a(a) = 0$. Il en vient que $F(a) + k = 0$ et donc $k = -F(a)$. Ainsi, pour tout réel $x \in [a;b]$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier, $F_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

Cette quantité ne dépend donc pas de la primitive choisie !

■ **Exemple 4 :** On cherche à calculer $\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1;5]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Ainsi,

$$\int_1^5 x^2) \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}.$$

■

2.2 Généralisation aux fonctions de signe quelconque

Définition 4 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

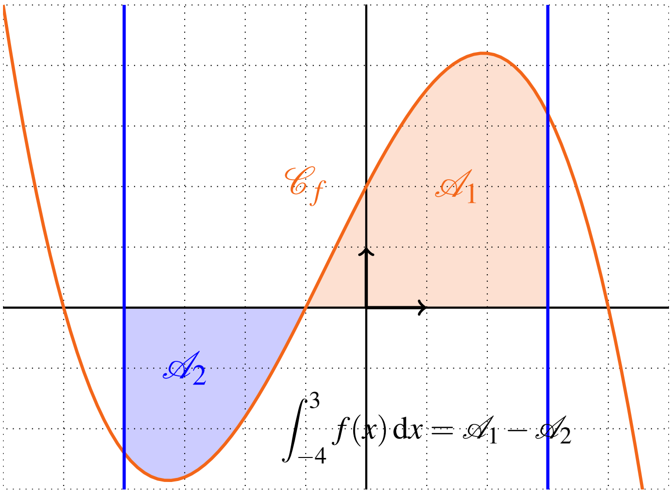
■ **Exemple 5 :** On cherche à calculer $\int_{-2}^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[-2;1]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^1 x^3) \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

■

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.



2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 2 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et c un réel de l'intervalle $[a,b]$. Soit λ réel.

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$;
- **(Relation de Chasles)** $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

La relation de Chasles permet notamment de calculer la valeur d'intégrales de fonctions définies par morceaux.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{, si } x<0 \\ x^3+1 & \text{, si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $[-2;3]$. En effet, le seul souci en éventuel se situe en 0.

Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^2+1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^3+1 = 1$ et $f(0)=1$. Ainsi,

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (x^3+1)dt.$$

Or, une primitive de $x \mapsto x^2+1$ sur $[-2,0]$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}+x$ et une primitive de $x \mapsto x^3+1$ sur $[0;3]$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}+x$. Finalement,

$$\int_{-2}^{3} f(t)dt = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{0}^{3} = \frac{14}{3} + \frac{93}{4} = \frac{335}{12}.$$

■

Propriété 3 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si pour tout réel x dans $[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Cette propriété est souvent utilisée dans le sens contraposé : si f est une fonction continue et positive d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle.

Propriété 4 : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x, $f(x) \leqslant g(x)$.

On a alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration 4 : La fonction $g-f$ est continue et positive sur $[a,b]$.

Ainsi, d'après la propriété précédente, $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or, $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. On a donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

■ **Exemple 7 :** Soit f une fonction continue sur $[-2,5]$ telle que pour tout $x \in [-2;5]$, $x \leqslant f(x) \leqslant 7$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, $\displaystyle\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^5 = \frac{21}{2}$ et $\displaystyle\int_{-2}^5 7\,\mathrm{d}x = [7x]_{-2}^5 = 49$. Ainsi, $\displaystyle\frac{21}{2} \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 49$. ■

2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel

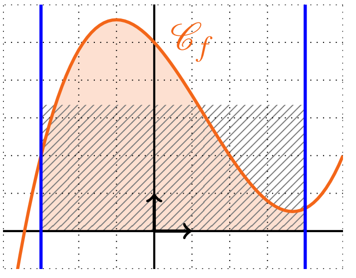
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■ **Exemple 8 :** La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ sur $[1;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4-\frac{1^3}{3}-1\right) = 24.$$

■

Pourquoi le nom de valeur moyenne ? Si l'on note M la valeur moyenne de la fonction f, alors l'aire sous la courbe de f entre a et b correspond à l'aire du rectangle ayant pour longueur $b-a$ et pour hauteur M.
Dans le cas ci-contre, le rectangle hachuré (qui a pour hauteur la valeur moyenne de la fonction représentée) et le domaine rempli en rouge ont la même aire.



3 Intégration par parties

Propriété 5 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Alors

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration 5 : uv est dérivable sur $[a,b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. En intégrant cette égalité entre a et b, on obtient le résultat voulu. □

■ **Exemple 9 :** On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = x$. On a alors $u'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ de sorte que $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

On cherche alors à calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

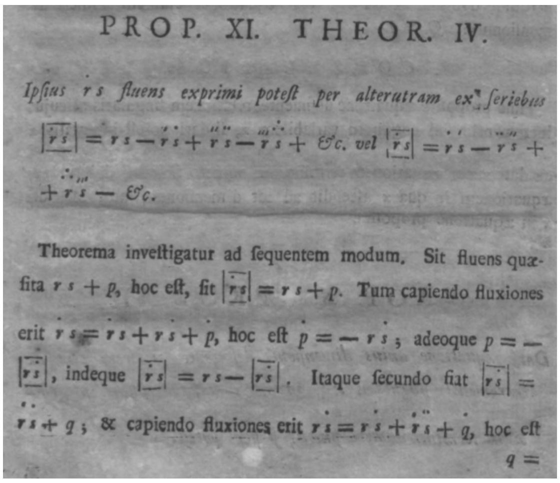
$$\int_0^1 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = \left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\left[x \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ et $\int_0^1 1 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{1}{4}$. Ainsi,

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

■

L'intégration par parties est pour la première fois abordée par Brook Taylor en 1715, dans son livre *Methodus Incrementorum directa et inversa*. Dans cet ouvrage, Taylor utilise la notation de Newton : les dérivées sont symbolisées par un point et les intégrales par un rectangle qui entoure la fonction.



PROP. XI. THEOR. IV.

Ipsius $r\dot{s}$ fluens exprimi potest per alterutram ex seriebus $\boxed{r\dot{s}} = rs - \dot{r}s' + \ddot{r}s'' - \dddot{r}s''' + $ &c. vel $\boxed{r\dot{s}} = \dot{r}s - r's + \ddot{r}s''' - $ &c.

Theorema investigatur ad sequentem modum. Sit fluens quæsita $rs + p$, hoc est, sit $\boxed{r\dot{s}} = rs + p$. Tum capiendo fluxiones erit $r\dot{s} = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$, hoc est $\dot{p} = -\dot{r}s$; adeoque $p = -\boxed{\dot{r}s}$, indeque $\boxed{r\dot{s}} = rs - \boxed{\dot{r}s}$. Itaque secundo fiat $\boxed{\dot{r}s} = \dot{r}s' + q$; & capiendo fluxiones erit $\dot{r}s = \dot{r}s + \ddot{r}s' + \dot{q}$, hoc est $q =$

2. Exercices

Intégrale d'une fonction continue positive

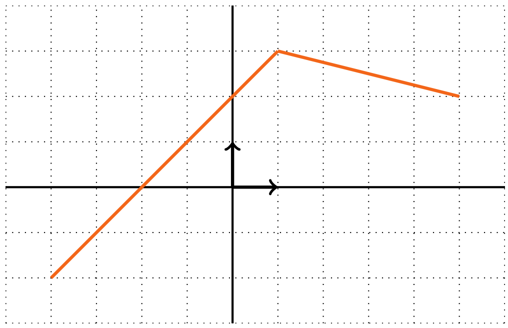
► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

Déterminer les valeurs de

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

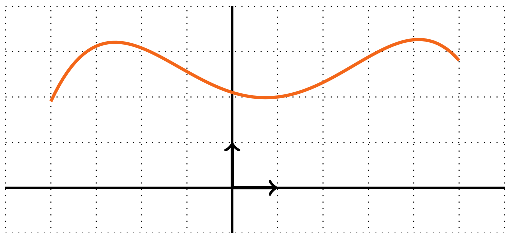
$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$$



► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.

Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.



► Exercice 3 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x+8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x,-x)$. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit x un réel supérieur ou égal à 4. Exprimer $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t+3)dt$ en fonction de x.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit f une fonction affine que l'on suppose positive sur $[-3;5]$, telle que $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 24$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 14$. Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Après avoir déterminé la nature de la courbe représentative de f, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Intégrale et primitives

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{0}^{10} \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)\,\mathrm{d}x$ **f.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)\,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ **h.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **i.** $\displaystyle\int_{0}^{2} ((x+1)(x+2))\,\mathrm{d}x$

j. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ **k.** $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **l.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **f.** $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Calculer alors $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \quad : \quad 10y' + y = 30$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) : $10y' + y = 0$.
2. Déterminer une solution constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle. On a donc $v(0) = 0$.
   Déterminer une expression de $v(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

Partie B : Étude de la fonction v

On considère la fonction $v : t \mapsto 30 - 30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$.

1. Montrer que la fonction v est croissante et concave sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.
   (a) Compléter le programme suivant, écrit en Python, qui permet de renvoyer la plus petite valeur de t, à la seconde près, à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée. On rappelle que la commande **from math import exp** permet d'utiliser la fonction exponentielle qui s'écrit **exp** en Python.

```
from math import exp

def v_prime(x) :
  return ...

def seuil() :
  t = 0
  while v_prime(t) ... :
    t = ...
  return t
```

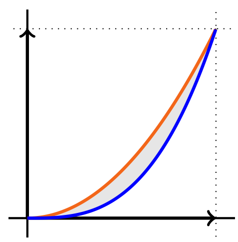
   (b) A l'aide d'une résolution d'inéquation, déterminer la valeur de t recherchée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes, arrondie au mètre près.

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{, si } x < -1 \\ 2x^3 - x + 1 & \text{, si } x \geqslant -1 \end{cases}$.

Justifier que f est continue sur $[-4;1]$ puis calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$.

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé



On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-x^2 \leqslant -2x + 1$ et que $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{e}{2}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

▶ Exercice 16 – Voir le corrigé

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$.

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2+4x$ sur $[0;4]$.

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

Un bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à :

$$f(x) = \frac{5\ln(x)}{x} + 3.$$

1. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{5\ln(x)^2}{2} + 3x$ est une primitive de f sur $[2;4]$.
2. Calculer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces.

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit f une fonction affine. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ vaut $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Intégration par parties

▶ Exercice 20 – Voir le corrigé

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

▶ Exercice 21 (Un extrait d'exercice que j'ai eu au bac...) – Voir le corrigé

On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur cet intervalle.
2. En déduire la valeur de I.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de J.

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

Soit t un réel strictement supérieur à 1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = 1$.

▶ Exercice 23 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

▶ Exercice 24 – Voir le corrigé

En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

Exercices de synthèse

▶ Exercice 25 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel $x \in [0;4]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Chercher trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + x)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f et en déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Retrouver cette valeur à l'aide de deux intégrations par parties successives.

▶ Exercice 26 (Sujet zéro 2024) – Voir le corrigé

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n\mathrm{e}^x$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. On désigne par I_n la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par $F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   (b) Calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction **mystere** écrite dans le langage Python.

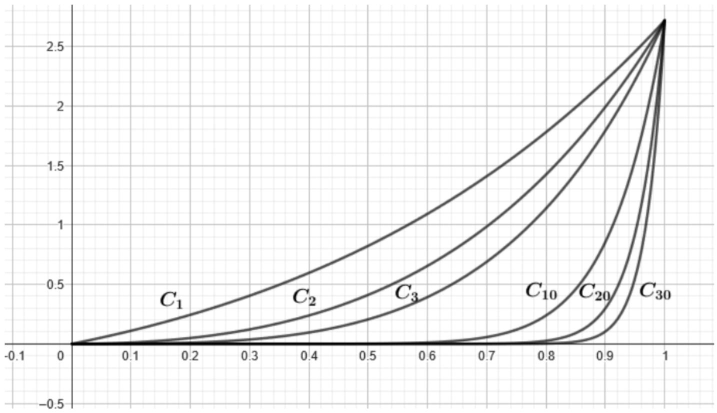
```
from math import e #la constante d'Euler e

def mystere(n):
  a = 1
  L = [a]
  for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1) * a
    L.append(a)
  return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel **mystere(5)**.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20} et C_{30}.



   (a) Donner une interprétation graphique de I_n.
   (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

► Exercice 27 (Métropole 2024) – Voir le corrigé

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   (c) Étudier le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.
   (d) Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1;2]$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0;1]$ par $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln(x)$. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonctione dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   (b) On admet le tableau de signes suivant :

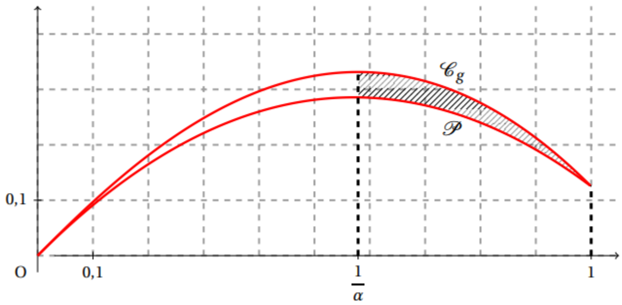
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	||	$+$	0	$-$	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0;1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire

On a représenté sur le graphique ci-dessous

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{P}$ et les droites d'équation $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. (a) Justifier la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0;1]$.
   (b) Démontrer l'égalité
   $$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$
2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

▶ Exercice 28 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n, on a
   $$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (nI_n).

3. Corrigés

Intégrale d'une fonction continue positive

► Correction 1 – Voir l'énoncé

$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ est l'aire d'un triangle et vaut $\dfrac{2\times 2}{2} = 2$.

$\int_{0}^{5} f(x)\,dx$ est l'aire de deux trapèzes.

Le premier a une aire de $\dfrac{(2+3)\times 1}{2}$ et le deuxième une aire de $\dfrac{(3+2)\times 4}{2}$. L'aire total vaut donc 12,5.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ est l'aire de deux trapèzes.

Le premier a une aire de $\dfrac{(1+3)\times 2}{2}$ et le deuxième a une aire de $\dfrac{(3+2.5)\times 2}{2}$. L'aire totale vaut donc 9,5.

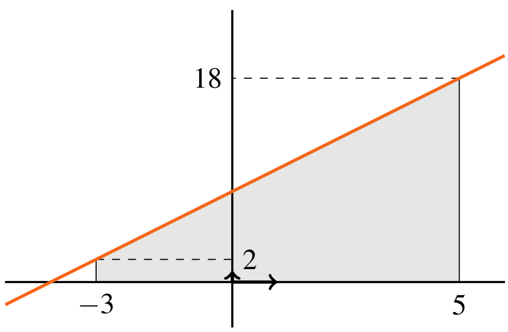
Pour calculer l'aire $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$, il suffit d'ajouter les aires $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$. L'aire recherchée vaut donc 14,5.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Il est possible d'encadrer l'intégrale en comptant le nombre de carreaux sous la courbe pour avoir un minorant. On ajoute les carreaux que la courbe traverse pour obtenir un majorant. On a donc $19 \leqslant \int_{-4}^{5} f(x)\,dx \leqslant 30$. Cet encadrement peut largement être amélioré (en ne considérant que des demi-carreaux par exemple).

► Correction 3 – Voir l'énoncé

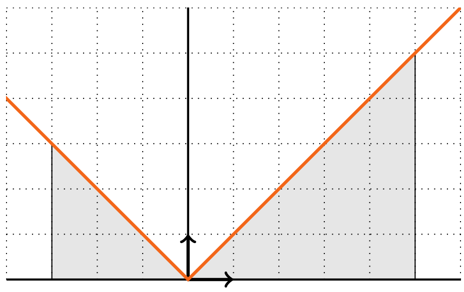
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x+8$. $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$ désigne l'aire ci-dessous.



Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 2 et 18 et la hauteur a pour longueur 8. Cette aire vaut donc $\dfrac{(2+18)\times 8}{2}$. Ainsi, $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx = \dfrac{2+18}{2}\times 8 = 80$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

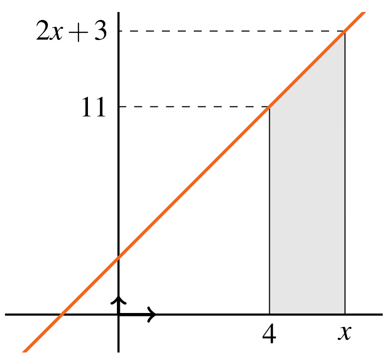
L'intégrale $\int_{-3}^{5} |x|\,dx$ est représentée par l'aire ci-dessous.



Il s'agit de l'aire de deux triangles. Le premier a une aire de $\frac{3\times 3}{2}$ et le deuxième une aire de $\frac{5\times 3}{2}$.
Ainsi, $\int_{-3}^{5} |x|\,\mathrm{d}x = 17$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

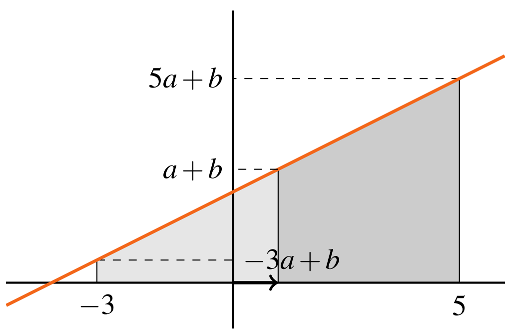
L'intégrale $\int_{4}^{x} (2t+3)dt$ représente l'aire de la surface grisée ci-dessous.



Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 11 et $2x+3$ et la hauteur a pour longueur $x-4$.
Cette aire vaut donc $\frac{(2x+3+11)\times(x-4)}{2}$ soit $x^2+3x-28$. Ainsi, $\int_{4}^{x} (2t+3)dt = x^2+3x-28$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Soit a et b deux réels tels que, pour tous réels x, $f(x) = ax+b$. Représentons la situation.



L'aire $\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire jointe des deux trapèzes.
Celle-ci vaut $\frac{-3a+b+5a+b}{2}\times(5-(-3)) = 8(a+b)$.

L'aire $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du trapèze foncé. Celle-ci vaut $\dfrac{a+b+5a+b}{2}\times(5-1)=2(6a+2b)$.

Ainsi, on a $\int_{-3}^5 f(x)\,\mathrm{d}x=24$ et $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=14$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l}8(a+b)=24\\2(6a+2b)=14\end{array}\right.$.

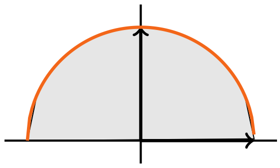
Ce système est équivalent à $\left\{\begin{array}{l}a+b=3\\6a+2b=7\end{array}\right.$.

En soustrayant deux fois la première ligne à la deuxième ligne, on obtient $\left\{\begin{array}{l}a+b=3\\4a=1\end{array}\right.$.

Finalement, $\left\{\begin{array}{l}b=\frac{11}{4}\\a=\frac{1}{4}\end{array}\right.$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{11}{4}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

La courbe représentative de la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1;1]$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1. L'aire du demi-disque vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.



Intégrale et primitives

► Correction 8 – Voir l'énoncé

a. $\displaystyle\int_{-5}^7\sqrt{2}\,\mathrm{d}x=[\sqrt{2}x]_{-5}^7=\sqrt{2}(7-(-5))=12\sqrt{2}$. Il est aussi possible de procéder à un calcul d'aire.

b. $\displaystyle\int_3^{14}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=[\ln(x)]_3^{14}=\ln(14)-\ln(3)=\ln\left(\frac{14}{3}\right)$.

c. $\displaystyle\int_{-2}^4(x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-2}^4=\frac{4^3}{3}+\frac{3}{2}\times4^2+4\times4-\left(\frac{(-2)^3}{3}+\frac{3}{2}\times(-2)^2+4\times(-2)\right)=66$.

d. $\displaystyle\int_0^{10}\mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5}\right]_0^{10}=-\frac{\mathrm{e}^{-50}}{5}+\frac{1}{5}$. Attention à d'éventuelles erreurs de signe ici !

e. $\displaystyle\int_{-1}^1(x^4-x^2+x-1)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^1=-\frac{34}{15}$.

f. $\displaystyle\int_{-2}^2(8x^5+5x^3+2x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4}{3}x^6+\frac{5}{4}x^4+x^2\right]_{-2}^2=0$. On aurait également pu tout simplement remarquer que la fonction intégrée était impaire et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0.

g. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1=\frac{\mathrm{e}^2-1}{2}$.

h. $\displaystyle\int_1^9\frac{3}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\left[3\sqrt{x}\right]_1^9=6$.

i. $\displaystyle\int_0^2 ((x+1)(x+2))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{38}{3}.$

j. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$

k. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_3^7 = \frac{4}{21}.$

l. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{7}{8}.$

► Correction 9 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel $x\in[-2;4]$, on pose $u(x)=x^2$. On a alors $u'(x)=2x$ et $2x\mathrm{e}^{x^2}=u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}$. Une primitive de $x\mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $[-2;4]$ est donc la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^4 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-2}^4 = \mathrm{e}^{16}-\mathrm{e}^4.$$

b. Pour tout réel $x\in[2;e]$, on pose $u(x)=\ln(x)$ (qui est alors strictement positif). On a alors $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x\ln(x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $[2;e]$ est donc la fonction $x\mapsto\ln(\ln(x))$. Ainsi,

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln\ln(x)]_2^e = -\ln(\ln(2)).$$

c. Pour tout réel $x\in[1;3]$, on pose $u(x)=\dfrac{1}{x}$. On a alors $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}=-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x}=-u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$ sur $[1;3]$ est donc la fonction $x\mapsto-\mathrm{e}^{1/x}$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1/x}\right]_1^3 = e-\mathrm{e}^{1/3}.$$

d. Pour tout réel $x\in[0;4]$, on pose $u(x)=1+x^2$. On a alors $u'(x)=2x$ et $\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $[0;4]$ est donc la fonction $x\mapsto\ln(1+x^2)$. Ainsi,

$$\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^4 = \ln(17).$$

e. Pour tout réel $x\in[-1;4]$, on pose $u(x)=9+x^2$. On a alors $u'(x)=2x$ et $\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de $x\mapsto\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ sur $[-1;4]$ est donc la fonction $x\mapsto\sqrt{9+x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{9+x^2}\right]_{-1}^4 = 5-\sqrt{10}.$$

f. Pour tout réel $x \in [-3;2]$, on pose $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$. On a alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ sur $[-3;2]$ est donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Ainsi,

$$\int_{-3}^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^2}.$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > -1$,

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} = f(x).$$

Une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est donc $F : x \mapsto \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^3 = \ln(4) + \frac{1}{4} - \ln(2) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{4}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. On a $10y' + y = 0$ si et seulement si $y' + \dfrac{1}{10}y = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t/10}$, pour C réel.
2. La solution constante de l'équation (E) est $y = 30$.
3. L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto C\mathrm{e}^{-t/10} + 30$, pour C réel.
4. On cherche C tel que $v(0) = 0$. On a alors $C + 30 = 0$ et donc $C = -30$. Ainsi, pour tout réel t, on a $v(t) = -30\mathrm{e}^{-t/10} + 30 = 30(1 - \mathrm{e}^{-t/10})$.

Partie B : Étude de la fonction v

1. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $v'(t) = 3\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$ et $v''(t) = -\dfrac{3}{10}\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$. En particulier, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $v'(t) \geqslant 0$ et $v''(t) \leqslant 0$. La fonction v est donc croissante et concave sur $]0;+\infty[$.
2. On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{10}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to-\infty}\exp(T) = 0$. Ainsi, par composition $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\exp\left(-\frac{t}{10}\right) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 30$.
3. (a) On complète le programme Python ci-dessous.

```python
from math import exp

def v_prime(x) :
  return 3 * exp(-x/10)

def seuil() :
  t = 0
  while v_prime(t) > 0.1 :
    t = t + 1
  return t
```

   (b) on cherche la plus petite valeur entière de t pour laquelle $v'(t) \leqslant 0.1$. Or, $v'(t) \leqslant 0{,}1$ si et seulement si $3\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right) \leqslant 0{,}1$ soit $\left(-\dfrac{t}{10}\right) \leqslant \dfrac{1}{30}$. Par croissance de la fonction logarithme népérien sur

$]0;+\infty[$, cela équivaut à $-\dfrac{t}{10} \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$ soit $t \geqslant 10\ln(30)$. Or, $10\ln(30) \simeq 34{,}01$. La valeur recherchée est donc 35 secondes.

4. Une primitive de v sur $[0;+\infty[$ est $V : t \mapsto 30t + 300\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{35} v(t) = [V(t)]_0^{35} \simeq 759$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Le seul problème éventuel se situe en -1. On a $\lim\limits_{x\to -1^1} f(x) = (-1)^2 + (-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 2\times(-1)^3 - (-1) + 1 = 0$. Ainsi, f est continue sur $[-4;1]$.

D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-4}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1} (t^2+t)dt + \int_{-1}^{1} (2t^3 - t + 1)dt.$$

Or, $\displaystyle\int_{-4}^{-1} (t^2+t)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{-1} = \frac{27}{2}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2t^3 - t + 1)d = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{1} = 2$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt = \frac{31}{2}$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

Par ailleurs, si on pose pour tout $x \in [0,1]$, $u(x) = 1 + \mathrm{e}^x$, on a $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)}$. u étant strictement positive, une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $[0;1]$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+\mathrm{e}^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right).$$

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Soit $x \in [0;1]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ puis, en multipliant cette inégalité par x^2, $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$, et donc $g(x) \leqslant f(x)$.

L'aire de la surface grisée vaut

$$\int_0^1 (f-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2\,\mathrm{d}x}-\int_0^n\mathrm{e}^{-x^2\,\mathrm{d}x}=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Puisque pour tout réel x entre n et $n+1$, $\mathrm{e}^{-x^2}>0$, il en vient que $\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ et donc $u_{n+1}\geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

2. Soit $x\geqslant 0$. Alors $(x-1)^2\geqslant 0$, c'est-à-dire, $x^2-2x+1\geqslant 0$ et donc $-x^2\leqslant -2x+1$. La fonction exponentielle étant croissante, on a alors $\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
3. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n=\int_0^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^n\mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2}\right]_0^n=-\frac{\mathrm{e}^{2n+1}}{2}+\frac{e}{2}\leqslant\frac{e}{2}.$$

4. La suite (u_n) est croissante et majorée : cette suite est donc convergente.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

La valeur moyenne de la fonction $f:x\mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$ vaut

$$\frac{1}{3-(-2)}\int_{-2}^{3}(3x+2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{3}=\frac{7}{2}.$$

► Correction 17 – Voir l'énoncé

La valeur moyenne de la fonction $f:x\mapsto -x^2+4x$ sur $[0;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-(0)}\int_0^4(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=-\frac{64}{3}+32=\frac{1}{4}\times\frac{32}{3}=\frac{8}{3}.$$

► Correction 18 – Voir l'énoncé

On rappelle que si u est dérivable sur un intervalle I, alors u^2 l'est également et $(u^2)'=2u'u$. Pour tout réel $x\in[2;4]$,

$$F'(x)=\frac{5}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)+3=f(x).$$

F est donc une primitive de f sur $[2;4]$.

La valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces vaut

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,[F(x)]_2^4=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5\ln(4)^2}{2}+3\times 4-\frac{5\ln(2)^2}{2}-3\times 2\right).$$

En utilisant le fait que $\ln(4)=2\ln(2)$, on obtient

$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=3+\frac{15\ln(2)^2}{4}.$$

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Soit m et p les réels tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ vaut

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{mx^2}{2}+px\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\times\left(\frac{mb^2-ma^2}{2}+p(b-a)\right)$$

puis

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\times(b-a)\times\left(\frac{m(b+a)+2p}{2}\right)$$

et donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{mb+ma+2p}{2} = \frac{ma+p+mb+p}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Intégration par parties

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \in [1;4]$, on pose...

- $v(x) = \ln(x)$. On a alors $v'(x) = \frac{1}{x}$;
- $u(x) = \frac{x^2}{2}$ de sorte que $u'(x) = \frac{x^2}{2}$.

On souhaite alors calculer $\int_1^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_1^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_1^4 - \int_1^4 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 8\ln(4) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^4 = 8\ln(4) - \frac{15}{4}.$$

► Correction 21 – Voir l'énoncé

F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. F est donc bien une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, $I = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_1^e = e\ln(e) - e - (1\ln(1) - 1) = 1$.

Pour tout réel $x \in [1;e]$, on pose...

- $v(x) = \ln(x)$. On a alors $v'(x) = \frac{1}{x}$;
- $u(x) = x\ln(x) - x$ de sorte que $u'(x) = \ln(x)$.

On souhaite alors calculer $J = \int_1^e (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J = [(x\ln(x) - x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x\ln(x) - x}{x}\,\mathrm{d}x = 0 - \int_1^e (\ln(x) - 1).$$

Ainsi,

$$J = -\left(\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x\right) = -I + (e-1) = e-2.$$

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = x$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_1^t - \int_1^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il en vient que

$$\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t 1\,\mathrm{d}x = t\ln(t) - t - 1.$$

En particulier, la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln sur $[1;+\infty[$ (et sur $]0;+\infty[$ en réalité !).

► Correction 23 – Voir l'énoncé

1. On a $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 = e - 1$.
2. Soit n un entier naturel.
   - Pour tout réel $x \in [0,1]$, on pose $v(x) = x^{n+1}$. On a alors $v'(x) = (n+1)x^n$.
   - Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ de sorte que $u'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.

   Ainsi,

   $$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

   D'après la formule d'intégrations par parties,

   $$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-\mathrm{e}^{1-x})\,\mathrm{d}x = -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = -1 + (n+1)I_n.$$

3. Ainsi,
   - $I_1 = -1 + 1 \times I_0 = -1 + e - 1 = e - 2$.
   - $I_2 = -1 + 2 \times I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose...

- $v(x) = x^2$. On a alors $v'(x) = 2x$;
- $u(x) = \mathrm{e}^x$ de sorte que $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

On souhaite alors calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^1 - \int_0^1 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

On souhaite maintenant calculer $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v_2(x) = x$. On a alors $v_2'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u_2(x) = \mathrm{e}^x$ de sorte que $u_2'(x) = \mathrm{e}^x$.

On cherche alors à calculer $\int_0^1 (u_2'v_2)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u_2'v_2)(x)\,\mathrm{d}x = [u_2v_2]_0^1 - \int_0^1 (u_2v_2')(x)\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - [\mathrm{e}^x]_0^1 = e-(e-1) = 1.$$

Finalement,

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e-2.$$

Exercices de synthèse

► Correction 25 – Voir l'énoncé

1. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-4}$	$\searrow$	0

2. D'après la question précédente, pour tout réel $x \in [0;4]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{-4}$.
3. On en déduit que $\int_0^4 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^4 4\mathrm{e}^{-4}\,\mathrm{d}x$ soit $0 \leqslant \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 16\mathrm{e}^{-4}$.
4. Soit $g : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\mathrm{e}^{-x}.$$

Il suffit alors de prendre a, b et c de telle sorte que $-a=1$, $2a-b=0$ et $b-c=0$. Ainsi, $a=-1$, $b=-2$ et $c=-2$ conviennent. Une primitive de f est donc $g : x \mapsto -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$. De fait,

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = 2-26\mathrm{e}^{-4}.$$

5. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$. D'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^4 - \int_0^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 2x\times(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -16\mathrm{e}^{-4} + 2\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout réel x, on pose alors $w(x) = x$. D'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (wv')(x)\,\mathrm{d}x = [wv]_0^4 - \int_0^4 (w'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

et donc

$$\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\mathrm{e}^{-4} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = 1 - 5\mathrm{e}^{-4}.$$

Ainsi,

$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -16\mathrm{e}^{-4} + 2(1-5\mathrm{e}^{-4}) = 2 - 26\mathrm{e}^{-4}.$$

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Partie I

1. (a) Pour tout réel $x \in [0;1]$, $F_1'(x) = 1\times\mathrm{e}^x + (x-1)\times\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$. F_1 est bien une primitive de f_1 sur $[0;1]$.
   (b) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1) - F_1(0) = 0 - (-1) = 1$.
2. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   On a alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,
   $$I_{n+1} = \int_0^1 uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)\,\mathrm{d}x = [x^{n+1}\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - (n+1)I_n.$$
3. On a $I_2 = I_{1+1} = e - (1+1)I_1 = e - 2$.
4. L'appel **mystere(5)** renvoie la liste des 5 premières valeurs de la suite (I_n).

Partie II

1. (a) (I_n) représente l'aire délimité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   (b) Il semblerait que l'aire sous la courbe se rapproche de 0, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. D'une part, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f_n(x) \geqslant 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle étant croissante, alors pour tout $x \in [0;1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$ et donc $f_n(x) \leqslant \mathrm{e}x^n$. En intégrant, on a donc bien $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
3. On a $\mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\times\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Or, on a vu que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

Partie A : étude de la fonction f

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$. Par somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
   (b) Pour tout $x>0$, on a $f'(x)=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x}{2x}+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2x+1}{x}$.
   (c) Puisque pour tout $x>0$, on a $2x+1>0$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. (on aurait également pu dire que la somme de deux fonctions croissantes est croissante...).
   (d) Pour tout réel $x>0$, $f''(x)=\dfrac{2\times 2x-(2x+1)\times 2}{(2x)^2}=-\dfrac{2}{(2x)^2}<0$.
   La fonction f est concave sur $]0;+\infty[$.
2. (a) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique.
   En outre, on a $f(1)=-1$ et $f(2)=\dfrac{1}{2}\ln(2)>0$. On peut donc affirmer que $\alpha\in[1;2]$.
   (b) On a le tableau de signes suivant.

x	0		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

3. On sait que $f(\alpha)=0$, c'est-à-dire $\alpha-2+\dfrac{1}{2}\ln(\alpha)=0$. Ainsi, $\dfrac{1}{2}\ln(\alpha)=2-\alpha$ et donc $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

1. Pour tout réel $x\in]0;1]$, on a

$$g'(x)=-\frac{7}{8}\times 2x+1-\frac{1}{4}\left(2x\times\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{2}x\ln(x)-\frac{1}{4}x=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln(x).$$

   Ainsi,

$$g'(x)=x\left(\frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}\ln(x)\right)=x\left(\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) Soit $x\in\left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a alors $0<x<\dfrac{1}{\alpha}$ et donc $\dfrac{1}{x}>\alpha$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on a alors $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>f(\alpha)$. Or, $f(\alpha)=0$. Ainsi, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$.
   (b) On sait que pour tout $x\in]0;1]$, $g'(x)$ est du signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C : un calcul d'aire

1. (a) Pour tout réel $x \in]0;1]$, on note $h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x$. On a alors

$$g(x) - h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x).$$

Or, pour tout $x \in]0;1]$, $x^2 > 0$. De plus, la fonction logarithme népérien étant croissante sur $]0;1]$, on a alors $\ln(x) \leqslant \ln(1)$ soit $\ln(x) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0;1]$, $g(x) - h(x) \geqslant 0$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est donc au-dessus de $\mathscr{P}$.

(b) On souhaite calculer $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{\alpha};1\right]$, on pose $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

On a alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = x^2$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 0 - \frac{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{3\alpha^3} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9\alpha^3}\right).$$

On a utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln(\alpha)$. On rappelle alors que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$. Ainsi,

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{12-6\alpha}{9\alpha^3} - \frac{\alpha^3}{9\alpha^3} + \frac{1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3+6\alpha+13}{9\alpha^3}.$$

2. L'aire hachurée vaut

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(g(x)-h(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln(x)\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\times\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}.$$

► Correction 28 – Voir l'énoncé

1. On a $I_0 = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. On procède à une intégration par parties, en posant, pour tout réel x entre 0 et 1, $u(x) = x$ (et donc $u'(x) = 1$) et $v(x) = \ln(1+x)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, $[x\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$. Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) - [x - \ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - (1-\ln(2)) = 2\ln(2) - 1.$$

2. Pour tout entier naturel n, pour tout réel $x \in [0;1]$ on a $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$. Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $1+x \geqslant 1$ et donc, en appliquant la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $[1;+\infty[$, on a donc que $\ln(1+x) \geqslant 0$. Finalement, pour tout entier naturel n, pour tout réel $x \in [0;1]$, $0 \leqslant x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n \ln(1+x)$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on a donc que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est positive et décroissante, elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ et donc $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)$, qui est lui-même inférieur à 1. Ainsi, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$.

   (b) En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et 1, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$. Or,
   $$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) On sait que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge (ce que l'on avait déjà démontré) et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. (a) Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (on a alors $v'(x) = x^n$). Par intégration par parties, on a alors
   $$I_n = \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

   (b) Pour tout entier naturel n,
   $$nI_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ (on peut factoriser par n ou écrire $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$). Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^n$ et donc, en intégrant entre 0 et 1,
   $$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
   Ainsi, en utilisant le théorème d'encadrement, on trouve que cette intégrale converge et que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$$
   Finalement, la suite (nI_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$.