1. Cours : Loi des grands nombres

1 Opérations sur les variables aléatoires

1.1 Sommes et produits par un réel

Définition 1 : Soit X une variable aléatoires réelle, définie sur Ω. Soit a un réel non nul et b un réel.

La variable aléatoire $aX+b$ est définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $(aX+b)(\omega) = a \times X(\omega) + b$

Ainsi, pour tout réel k, on a $\mathbb{P}(aX+b=k) = \mathbb{P}\left(X = \dfrac{k-b}{a}\right)$.

■ **Exemple 1 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-2	3	7
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

On note Y la variable aléatoire telle que $Y = 3X-1$.
Puisque X prend les valeurs -2, 3 et 7, Y prend les valeurs -7, 8 et 20.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y=-7) = \mathbb{P}(3X-1=-7) = \mathbb{P}(X=-2)$.
La loi de Y peut être résumée par le tableau ci-contre.

k	-7	8	20
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

■

■ **Exemple 2 :** On considère le jeu suivant : on paye 10 euros puis on lance 4 dés équilibrés à 6 faces, numérotés de 1 à 6. On remporte alors 6 euros par dé qui tombe sur le nombre 6.

Notons X le nombre de 6 obtenus et Y le gain en euros à l'issue de ce jeu. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$.

Par ailleurs, on a $Y = 6X-10$. En effet, -10 représente le coût fixe du jeu, et $6X$ le gain, 6 euros par numéro 6 obtenu. Il est donc facile d'obtenir la loi de Y à partir de celle de X.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{625}{1296}$	$\dfrac{125}{324}$	$\dfrac{25}{216}$	$\dfrac{5}{324}$	$\dfrac{1}{1296}$

k	-10	-4	2	8	14
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\dfrac{625}{1296}$	$\dfrac{125}{324}$	$\dfrac{25}{216}$	$\dfrac{5}{324}$	$\dfrac{1}{1296}$

■

1.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 2 : Soit n un entier naturel et X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires définies sur un univers Ω.

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ... X_n sont mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, on a

$$\mathbb{P}(X = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \ldots \cap X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

■ **Exemple 3 :** On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6.On appelle X le numéro obtenu au premier lancer, Y le numéro obtenu au deuxième lancer et Z le numéro obtenu au troisième lancer. Alors, les variables aléatoires X, Y, et Z sont indépendantes.

Plus généralement, si l'on considère une succession d'épreuves aléatoires indépendantes, chacune étant reliée à une variable aléatoire réelle, alors ces variables aléatoires sont indépendantes. ■

1.3 Somme de deux variables aléatoires

Définition 3 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω.

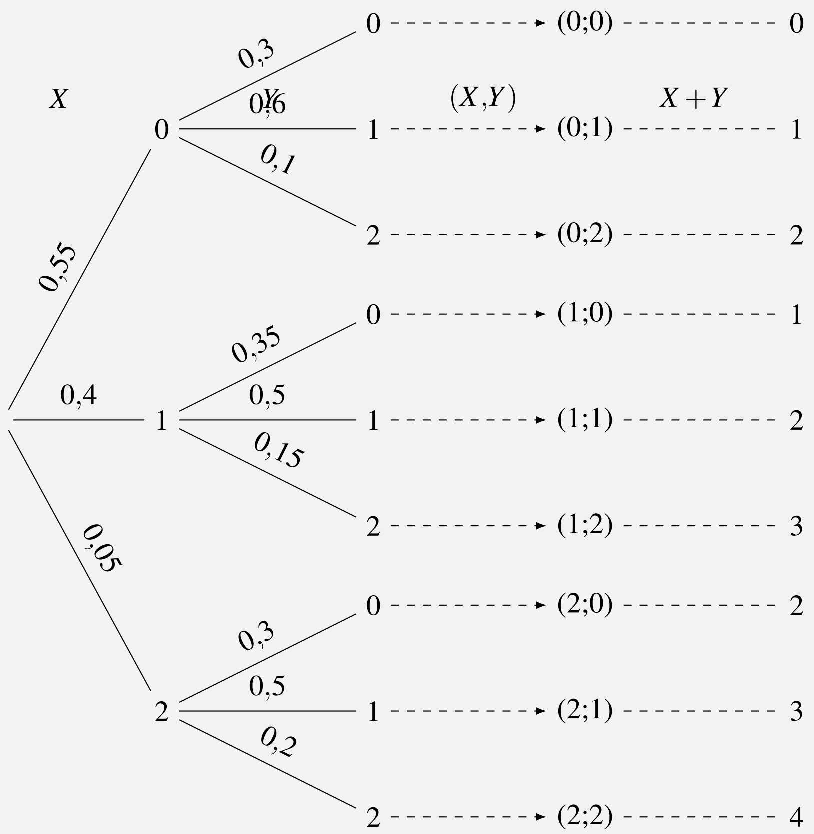
La variable aléatoire $Z = X + Y$ est définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Par ailleurs, pour tout réel k, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \sum\limits_{i+j=k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a alors $\mathbb{P}(Z = k) = \sum\limits_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$.

■ **Exemple 4 :** Un supporter de football a étudié le nombre de buts marqués par son équipe au cours d'une saison. On considère un match au hasard de cette équipe et on appelle X le nombre de buts marqué par cette équipe en première mi-temps de ce match et Y le nombre de buts marqués en second mi-temps. Ainsi, $X + Y$ représente le nombre de buts marqués par l'équipe en question au cours du match.

D'après l'étude de ce supporter, on peut construire l'arbre de probabilités suivant.



La variable aléatoire $X + Y$ prend alors les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4.

Il est alors possible d'établir la loi de en s'appuyant sur cet arbre de probabilités. Par exemple, on a

$$\mathbb{P}(X+Y=1)=\mathbb{P}(X=0\cap Y=1)+\mathbb{P}(X=1\cap Y=0)=0{,}55\times 0{,}6+0{,}4\times 0{,}35=0{,}47$$

La loi de $X+Y$ peut alors être résumée dans le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

■

2 Espérance et variance d'une somme de variables

2.1 Cas général

Propriété 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires, a et b deux réels. On a

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad \text{et} \qquad E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

■ **Exemple 5 :** On considère le jeu suivant : la participation est fixée à 8 euros. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on remporte deux fois la somme inscrite sur le dé. On considère la variable aléatoire X qui donne le résultat du lancer et Y le gain du joueur, positif ou négatif. On a alors $Y=2X-8$.

L'espérance de X est 3,5. Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(2X-8)=2\mathbb{E}(X)-8=2\times 3{,}5-8=-1$.
L'espérance étant négative, le jeu est défavorable au joueur. ■

■ **Exemple 6 :** On reprend l'exemple précédent de l'étude du supporter. La loi de X s'obtient simplement à l'aide du premier sous-arbre. La loi de $X+Y$ avait été déterminée.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

On a alors $E[X]=1\times 0{,}4+2\times 0{,}05=0{,}5$ et $E[X+Y]=1\times 0{,}47+2\times 0{,}27+3\times 0{,}085+4\times 0{,}01=1{,}305$.
Or, $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$. Ainsi, $E[Y]=E[X+Y]-E[X]=1{,}305-0{,}5=0{,}805$.

Il est aussi possible de déterminer la loi de la variable aléatoire Y. En effet, les événements $\{X=0\}$, $\{X=1\}$ et $\{X=2\}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(Y=0\cap X=0)+\mathbb{P}(Y=0\cap X=1)+\mathbb{P}(Y=0\cap X=2)=0{,}55\times 0{,}3+0{,}4\times 0{,}35+0{,}05\times 0{,}3.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y=0)=0{,}32$. On calcule de la même manière $\mathbb{P}(Y=1)$ et $\mathbb{P}(Y=2)$ pour obtenir le tableau suivant.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,32	0,555	0,125

On retrouve alors que $E[Y]=0\times 0{,}32+1\times 0{,}555+2\times 0{,}125=0{,}805$. ■

Remarque : Dans l'exemple précédent, les variables aléatoires X et Y n'étaient pas indépendantes, et pourtant, l'espérance de la somme pouvait être exprimée comme la somme des espérances.

L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires est toutefois primordiales pour la propriété qui suit.

Propriété 2 : Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, a un réel.

$$V(aX) = a^2 \times V(X) \qquad \text{et} \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Il est important de ne pas oublier le carré : une variance est toujours positive !

Attention également à ne pas se faire piéger lorsque l'on calcule la variance de la somme.
Si X et Y sont deux variables aléatoire réelles indépendantes, alors

$$V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y).$$

■ **Exemple 7 :** Toujours dans l'exemple précédente, on peut comparer les variances de X, Y et $X+Y$.

Calculons la variance de X. On rappelle pour cela la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	4
$\mathbb{P}(X^2=k)$	0,55	0,4	0,05

Ainsi, $E[X^2] = 0 \times 0{,}55 + 1 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}05 = 0{,}6$ et donc $V(X) = 0{,}6 - 0{,}5^2 = 0{,}35$.

De même, $E[Y^2] = 0 \times 0{,}32 + 1 \times 0{,}555 + 4 \times 0{,}125 = 1{,}055$ et donc $V(Y) = 1{,}055 - 0{,}805^2 = 0{,}406975$.

Enfin, $E[(X+Y)^2] = 0 \times 0{,}165 + 1 \times 0{,}47 + 4 \times 0{,}27 + 9 \times 0{,}085 + 16 \times 0{,}01 = 2{,}475$
On obtient donc $V(X+Y) = 2{,}475 - 1{,}305^2 = 0{,}771975$.

En particulier, on voit que $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$. Ce n'est pas surprenant puisque les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

■

2.2 Applications à la loi binomiale

Propriété 3 : Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Notons $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. La variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration 1 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, on a en particulier $E[X_i] = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$.

On note alors $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. D'après la propriété précédente, S suit également une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. S et X sont donc de même loi et ont la même espérance.

Or, on a $E[S] = p + p + \ldots + p = np$.
De plus, les variables X_i étant indépendants, $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$. □

■ **Exemple 8 :** On lance 12 dés équilibrées à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note Y la variable aléatoires qui compte le nombre de 6 obtenus.

Y suit une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$. Ainsi, $E[Y] = 12 \times \frac{1}{6} = 2$ et $V(Y) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ ■

3 Concentration et loi des grand nombres

3.1 Échantillon de variables aléatoires

Définition 4 : Un échantillon est un ensemble de variables aléatoires réelles $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes et de même loi.

La variable aléatoire moyenne de cette échantillon est la variable aléatoire notée M_n ou $\overline{X}$, définie par

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

Propriété 5 : On a alors $\mathbb{E}(M_n) = E[X_1]$, $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X_1)$ et $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_1)$

Démonstration 2 : On a en effet

$$E[M_n] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n}(E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \times nE[X_1] = E[X_1]$$

Par ailleurs, les variables aléatoires étant indépendantes,

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n))$$

et donc

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$$

□

■ **Exemple 9 :** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{3}$.

On rappelle que $E[X] = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ et $V(X) = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_{100})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_{100} = \frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100})$.

On a alors $E[M_{100}] = E[X] = 1$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{100} = \frac{2}{300}$. ■

On remarque que lorsque n tend vers $+\infty$, la variance de M_n tend vers 0 alors que l'espérance ne change pas. Cela signifie intuitivement que la variable aléatoire M_n se rapproche d'une variable aléatoire "constante". Ce comportement sera précisé plus en détails dans les parties qui suivent.

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 6 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout réel δ strictement positif

$$\mathbb{P}(|X-E[X]| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(x)}{\delta^2}$$

Cette inégalité illustre le fait que la variance permet de mesurer l'écart d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.

■ **Exemple 10 :** Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 1.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à $\delta = 4$, on a $\mathbb{P}(|X-10| \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{4^2}$.

Par ailleurs, les événements $|X-10| \geqslant 4$ et $|X-10| < 4$ étant contraires, on a donc

$$\mathbb{P}(|X-10| < 4) = 1 - \mathbb{P}(|X-10| \geqslant 4) \geqslant 1 - \frac{1}{4^2}.$$

Or, $|X-10| < 4$ est équivalent à $X \in]10-4;10+4[$, c'est-à-dire $X \in]6;14[$. Finalement, $\mathbb{P}(X \in]6;14[) \geqslant \frac{15}{16}$.
■

■ **Exemple 11 :** On lance 180 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de 1 obtenus. X suit donc une loi binomiale de paramètres 180 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi, $E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30$ et $V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25$.

Lors des précédentes chapitres, nous avons interprété l'espérance comme une moyenne si l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire. Ainsi, si on lance 180 fois un dé, on s'attend en moyenne à avoir 30 fois le nombre 6.

Seulement, tout ceci n'est qu'une moyenne, et il est rare de tomber exactement 30 fois sur la face numéro 6. Cependant, il y a une grande probabilité que le nombre de fois que nous obtenons ce nombre 6 soit proche de 30, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut nous fournir une minoration de cette probabilité.

On souhaite par exemple minorer la probabilité que X soit compris entre 21 et 39.

Or, $X \in [21;39]$ revient à dire que $X \in [30-9;30+9]$ c'est-à-dire $|X-30| \leqslant 9$. Puisque la variable aléatoire X prend des valeurs entières uniquement, ceci est équivalent à $|X-30| < 10$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|X-E(X)| \geqslant 10) \leqslant \frac{V(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Ainsi, puisque $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 10) + \mathbb{P}(|X-E(X)| \geqslant 10) = 1$, on a que

$$\mathbb{P}(|X-E(X)| < 10) = 1 - \mathbb{P}(|X-E(X)| \geqslant 10) \geqslant 1 - \frac{1}{4}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 10) \geqslant \frac{3}{4}$.

Si l'on lance 180 dés, la probabilité d'avoir entre 21 et 39 fois le nombre 6 est supérieure à 0,75. ■

Cette borne n'est pas toujours optimale. En l'occurrence, en faisant les calculs de manière exhaustive, on s'aperçoit que $\mathbb{P}(|X-E(X)|<10) \simeq 0{,}9434$, mais ce calcul est un poil plus compliqué...

3.3 Inégalité de concentration

Propriété 7 — Inégalité de concentration : Soit $(X_1,\dots,X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes, et M_n la variable aléatoire moyenne de cette échantillon. Alors, pour tout réel δ strictement positif,

$$\mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$$

Démonstration 3 : On applique simplement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n. Son espérance vaut $E(X_1)$ et sa variance $\dfrac{V(X_1)}{n}$. □

■ **Exemple 12 :** Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 100.

On considère un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$.

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel δ strictement positif, on a alors $\mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X_1)}{n\delta^2}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|M_n-3| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{100}{n\delta^2}$.

En particulier, pour $n = 100000$ et $\delta = 0{,}1$, on a $\mathbb{P}(|M_n-3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{100}{100000 \times 0{,}1^2}$

Ainsi, $\mathbb{P}(|M_n-3| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}1$.

En passant au complémentaire, on obtient alors que $\mathbb{P}(|M_n-3| < 0{,}1) = 1-\mathbb{P}(|M_n-3| \geqslant 0{,}1) \geqslant 0{,}9$.

Bien que la variable aléatoire X ait une grande variance, si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, la moyenne des résultats est très proche de l'espérance de X : avec probabilité 0,9, la moyenne est entre 2,9 et 3,1. ■

3.4 Loi des grands nombres

Théorème 4 — Loi faible des grands nombres : Soit $(X_1,...,X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon. Pour tout réel δ strictement positif,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) = 0$$

Démonstration 5 : On applique l'inégalité de concentration à cet échantillon :

$$\mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X_1)}{n\delta^2} = 0$. De plus, $\mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) \geqslant 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n-E(X_1)| \geqslant \delta) = 0$. □

2. Exercices

Opérations sur les variables aléatoires

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	-1	2	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\dots$

1. Compléter ce tableau avec la probabilité manquante.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X+2$.
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = 2X-1$.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Une entreprise commercialise des lave-vaisselles et propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires au prix de 65 euros. Si une panne irréparable survient au cours de cette période, l'entreprise remboursera alors les 399 euros correspondant au prix du lave-vaisselle. D'après les statistiques relevées par l'entreprise, 11,5% des lave-vaisselles tombent en panne durant cette période de 3 ans. Un client achète un lave-vaisselle avec extension de garantie.

1. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le lave-vaisselle tombe en panne durant la période concernant l'extension de garantie et 0 sinon. Quelle est la loi de X ?
2. On note Y le gain réalisée par l'entreprise grâce à l'extension de garantie. Exprimer Y en fonction de X.

► Exercice 3 (Asie 2022) – Voir le corrigé

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 200)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet et C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus.
   (b) Exprimer C en fonction de Y puis donner la loi de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
   (c) Calculer l'espérance de C à l'euro près.
   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$

1. Compléter ces tableaux avec les probabilités manquantes.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X+Y=5)$?
4. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W = X+Y$
5. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A = 3X-2Y$.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

k	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

et

k	1	4	5
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $2X+3Y$.

Espérance et variance d'une somme de variables

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère les deux variables aléatoires X et Y de l'exercice précédent.

1. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
2. En déduire l'espérance et la variance de $3X+2$, de $X+Y$ et de $5X-2Y$.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit X et Y deux variables aléatoire indépendantes telles que $E(X)=3$, $E(Y)=-5$, $V(X)=1$ et $V(Y)=2$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_1 = 2X+3Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1
2. On considère la variable aléatoire $Z_2 = 4X-2Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_2.
3. On considère lavariable aléatoire $Z_3 = 3Y-2X+7$. Donner l'espérance et la variance de Z_3.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On dit qu'une variable aléatoire X est centrée réduite si son espérance est nulle et sa variance vaut 1.

Montrer que pour toute variable aléatoire X non constante et admettant une espérance et une variance, la variable $Y = \dfrac{X-\mathbb{E}(\mathbb{X})}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

► Exercice 9 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1 ,X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $\mathbb{P}(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On lance trois pièces de monnaies et on regarde sur quels côtés elles tombent.

1. On note X le nombre de FACE obtenus. Construire le tableau résumant la loi de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois pièces tombent du même côté et 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de Y ? On précisera la valeur du ou des paramètres(s).
   (b) Que vaut l'espérance de Y ?
3. Le jeu consiste à miser deux euros. Si les trois pièces tombent sur les mêmes faces, on reprend sa mise et on remporte cinq euros supplémentaires. Sinon, on perd la mise. On note Z la variable aléatoire qui détermine le gain algébrique du joueur.
   (a) Justifier que $Z = 7Y - 2$
   (b) En déduire l'espérance de Z. Ce jeu est-il équitable ?

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Une urne contient 100 jetons parmi lesquels 10 sont gagnants. Pour jouer à la loterie, un joueur doit payer 10 euros et tire au hasard et successivement deux jetons, en remettant entre temps le jeton tiré. Chaque jeton gagnant tiré lui rapporte 20 euros.

1. On note X le nombre de jetons gagnants tirés. Quelle est la loi de X ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. On note Y le gain algébrique d'un joueur. Expliquer pourquoi $Y = 20X - 10$.
4. En déduire l'espérance de Y. Ce jeu est-il équitable ?

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère les deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont données ci-dessous.

k	2	1	-1
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

et

k	1	2	-2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et Y.
2. On propose le jeu suivant : 8 boules sont dans une urnes. On mise un euro et on tire une de ces boules au hasard. 5 sont perdantes, 2 font gagner 2 euros et 1 fait gagner 3 euros. Quelle variable aléatoire permet de modéliser ce jeu ?
3. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Proposer une expérience aléatoire correspondant à la variable aléatoire Y.
5. On réalise deux fois le jeu correspondant à la variable X et trois fois celui correspondant à la variable Y. On note Z le gain algébrique de cette successions de jeu. Sans déterminer précisément la loi de Z, dire si ce jeu est avantageux pour le joueur ou non.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale. On suppose que $E(X)=6$ et $V(X)=4$. Retrouver les paramètres de la loi binomiale.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(10;0{,}3)$ et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(8;0{,}2)$. On suppose que X et Y sont des variables indépendantes.

1. Donner les espérances et variances de X et Y. Donner leur écart-type arrondi au millième.
2. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type arrondi au millième de la variable aléatoire Z définie par $Z=2X-3Y$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On range n objets dans une commode contenant n tiroirs, chaque objet étant placé uniformément au hasard et indépendamment des autres objets dans l'un de ces tiroirs. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

Partie A : Étude de cas particuliers

1. On suppose qu'il y a 2 tiroirs et 2 objets à ranger.
   (a) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement des 2 objets. Construire le tableau donnant la loi de X
   (b) En déduire l'espérance de X.
2. On suppose qu'il y a 3 tiroirs et 3 objets à ranger dans la commode. Un rangement peut alors être assimilé à un 3-uplet de $\{1;2;3\}$. Par exemple, le 3-uplet $(2;1;2)$ signifie que le premier objet est rangé dans le tiroir 2, le deuxième objet dans le tiroir 1 et le troisième objet dans le tiroir 2.
   (a) Combien de rangements différents peut-on effectuer ?
   (b) Combien de rangements laissant le tiroir 1 vide peut-on effectuer ?
   (c) Pour $k\in\{1;2;3\}$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon. Quelle est la loi de X_1 ?
   (d) On considère la variable aléatoire $X=X_1+X_2+X_3$. Que vaut $E[X]$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Cas général

On dispose désormais de n objets que l'on répartit uniformément au hasard et de manière indépendante dans les n tiroirs.

1. Pour $k \in \{1;2;\ldots;n\}$ on note Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon.
   Montrer que l'espérance de Y_1 vaut $\dfrac{(n-1)^n}{n^n}$.
2. En déduire le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

Loi des grands nombres

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$.

1. Donner l'espérance et la variance de M_n.
2. Pour quelle valeur de n la variance de M_n est-elle inférieure à 10^{-4} ?

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 1.

1. Traduire l'inégalité $|X-4| \geqslant 2$ en terme d'intervalle.
2. Donner une minoration de $\mathbb{P}(|X-E(X)| \in]2;6[)$.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire non constante. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thecbychev, minorer les probabilités $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 2\sigma(X))$ et $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 3\sigma(X))$.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

En 2018, le trafic moyen quotidien de véhicules sur le réseau autoroutier s'élevait à 24000 voitures, avec une variance de 6000. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000, puis à 100.

► Exercice 20 (Métropole 2024, Jour 1 Bis) – Voir le corrigé

Un client arrive à une station-service et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► Exercice 21 (Métropole 2024, jour 2) – Voir le corrigé

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude.

On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires N_1, N_2, ..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20;0{,}615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + + N_{10}$.

1. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
2. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80

► Exercice 22 – Voir le corrigé

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? sa variance ?
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire d'espérance 5 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_{100})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

1. Soit δ un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
   Écrire l'inégalité de concentration pour M_n.
2. En déduire l'entier n à partir duquel on a $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}01$.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

Une compagnie aérienne exploite un avion ayant une capacité de 200 places. Pour ce vol, une analyse a montré que chaque passager à une probabilité $p = 0{,}8$ de se présenter à l'embarquement. On suppose que les présences individuelles des passagers à l'embarquement sont indépendantes. La compagnie souhaite vendre davantage de billets que de places disponibles tout en limitant le risque de voir trop de personnes se présenter à l'embarquement.

Soit n un entier strictement supérieur à 200, correspondant au nombre de billets vendus. On note S_n le nombre de personnes se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de S_n ? Que valent son espérance et sa variance ?
2. On suppose que $n < 250$.
   (a) Justifier que si $S_n \geqslant 200$, alors $|S_n - 0{,}8n| \geqslant 200 - 0{,}8n$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 200) \leqslant \dfrac{0{,}16n}{(200 - 0{,}8n)^2}$.
   (c) Combien de billets la compagnie peut-elle vendre tout en ayant une probabilité inférieure à 5% que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement ?

▶ Exercice 25 – Voir le corrigé

Un joueur joue à la roulette en misant à chaque fois un euro sur une couleur (rouge ou noir). A chaque partie, il récupère sa mise et gagne un euro avec probabilité $\frac{18}{37}$. Sinon, il perd sa mise. Pour tout entier naturel n, on note X_n son gain après n parties et Y_n le nombre de parties gagnés parmi les n premières parties.

1. Quelle est la loi de Y_n ? Que vaut son espérance et sa variance ?
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n puis donner son espérance et sa variance.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier n à partir duquel la probabilité que le joueur ait perdu de l'argent après n parties soit supérieure ou égale à 0,95.

Exercices de synthèse

▶ Exercice 26 (Sujet zéro 2024) – Voir le corrigé

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

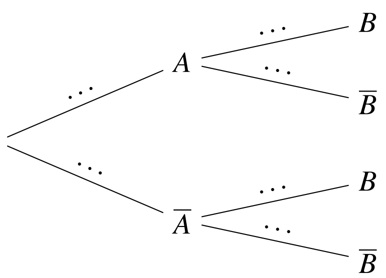
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X.
   Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(X=0)$ et $\mathbb{P}(X=2)$. En déduire $\mathbb{P}(X=1)$.
   (b) Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   (c) A-t-on $V(X)=V(X_1)+V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $\mathbb{P}(Y=8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z=X+Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
   On admet que les variables aléatoires Z_1, Z_2, ..., Z_n sont identiques à Z et indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire : $M_n=\dfrac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}$.
   (a) Quelle est l'espérance de M_n ?
   (b) Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   (c) Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6{,}3<M_n<8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

► Exercice 27 (Métropole 2024, Jour 1) – Voir le corrigé

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

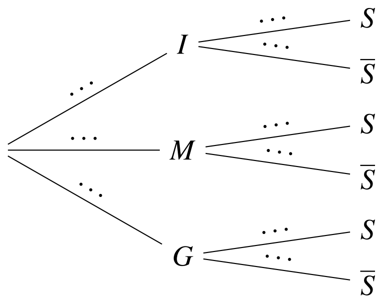
- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné. On définit les évènements suivants.

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle.
   Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   (a) Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.
   (b) Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

3. Corrigés

Opérations sur les variables aléatoires

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

La probabilité manquante est $\dfrac{3}{10}$. On a alors les tableaux suivants pour les lois de Y et Z.

k	-1	1	4	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

k	-5	-1	5	9
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,115. Par ailleurs, on a $Y = 65 - 399X$.

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

Les présences des passagers étant indépendantes, X suit une loi binomiale de paramètres 206 et 0,95.

D'après la calculatrice, $\mathbb{P}(X \leqslant 200) \simeq 0{,}948$. Il y a donc environ 5,2% de chances que trop de passagers se présentent à l'embarquement.

On a $\mathbb{P}(Y=6) = 1 - (\mathbb{P}(Y=0) + \cdots + \mathbb{P}(Y=5)) = 0{,}00003$.

En vendant 206 billets, la compagnie encaisse $206 \times 250 = 51500$ euros. Seulement, elle doit rembourser 850 euros par client ne pouvant embarquer (représenté par la variable Y). Ainsi, $C = 51500 - 850Y$.

k	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$\mathbb{P}(C=k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

On a alors $E[C] \simeq 51429$. Si la compagnie avait vendu seulement 200 billets, son chiffre d'affaires aurait été de 50000 euros, le surbooking lui est donc avantageux.

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

On complète les tableaux donnant les lois de X et Y en faisant en sorte que la somme des probabilités vaille 1.

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{12}$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$ est le suivant.

k	2	6	8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{5}{12}$

L'événement $X+Y=5$ est réalisé lorsque $(X=3\cap Y=2)$ ou $(X=4\cap Y=1)$. Ces variables étant indépendantes, on a donc

$$\mathbb{P}(X+Y=5)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{30}.$$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W=X+Y$ est le suivant.

k	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(W=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{4}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A=3X-2Y$ est le suivant.

k	-3	-1	1	3	5	6	7	8	10
$\mathbb{P}(A=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

La loi de $X+Y$ est la suivante.

k	3	4	6	7	8
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Le cas le plus compliqué ici est $X+Y=7$ puisqu'il y a deux cas à étudier.

$$\mathbb{P}(X+Y=7)=\mathbb{P}(X=2\cap Y=5)+\mathbb{P}(X=3\cap Y=4).$$

X et Y étant indépendantes, on a alors

$$\mathbb{P}(X+Y=7)=\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=5)+\mathbb{P}(X=3)\mathbb{P}(Y=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}.$$

La loi de $2X+3Y$ est la suivante.

k	7	9	16	18	19	21
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Espérance et variance d'une somme de variables

► Correction 6 – Voir l'énoncé

On a $E[X] = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ et $E[Y] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$.

Ainsi, $E[3X+2] = 3E[X]+2 = 10$, $E[X+Y] = E[X]+E[Y] = \frac{8}{3} + \frac{7}{2} = \frac{37}{6}$ et $E[5X-2Y] = 5E[X]-2E[Y] = \frac{40}{3} - 7 = \frac{19}{3}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a $E(Z_1) = 2E(X)+3E(Y) = 2\times 3 + 3 \times (-5) = -9$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, $V(Z_1) = V(2X)+V(3Y) = 4V(X)+9V(Y) = 4\times 1 + 9 \times 2 = 22$.

On a $E(Z_2) = 4E(X)-2E(Y) = 4\times 3 - 2 \times (-5) = 22$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, $V(Z_2) = V(4X)+V(-2Y) = 16V(X)+4V(Y) = 16\times 1 + 4 \times 2 = 24$.

On a $E(Z_3) = 3E(Y)-2E(X)+7 = 3\times(-5) - 2\times 3 + 7 = -14$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, et 7 étant un réel, $V(Z_3) = V(3Y)+V(-2X)+V(7) = 9V(Y)+4V(X)+0 = 9\times 2 + 4 \times 1 = 22$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

On a $E[Y] = \frac{E[X]-E[X]}{\sigma(X)} = 0$ et $V(Y) = \frac{V(X)+0}{\sigma(X)^2} = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$. Y est centrée et réduite.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

1. Le nombre de tirages est de $8\times 8 \times 8 = 512$.
2. (a) Le nombre de tirages sans répétition est de $8 \times 7 \times 6 = 336$.
   (b) Le nombre de tirages avec au moins une répétition est donc $512 - 336 = 176$.
3. X_1 prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, chacune avec probabilité $\frac{1}{8}$.
4. On a $E(X_1) = \frac{1}{8} \times (1+2+3+4+5+6+7+8) = \frac{9}{2}$.
5. On a $E(S) = E(X_1+X_2+X_3) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) = \frac{9}{2}+\frac{9}{2}+\frac{9}{2} = \frac{27}{2}$.
6. On a $S = 24$ si et seulement si le numéro 8 a été tiré lors des trois tirages. Ainsi, $\mathbb{P}(S=24) = \mathbb{P}((8;8;8)) = \frac{1}{512}$.
7. (a) Les 10 tirages possibles sont $(8;8;8)$, $(8;8;7)$, $(8;7;8)$, $(7;8;8)$, $(8;7;7)$, $(7;8;7)$, $(7;7;8)$, $(8;8;6)$, $(8;6;8)$ et $(6;8;8)$.
   (b) La probabilité de gagner un lot est donc de $\frac{10}{512}$ soit $\frac{5}{256}$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$. Le tableau résumant la loi de X est le suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. L'espérance de Y vaut $\frac{1}{4}$.

On a alors $Z = 7Y - 2$: Si Y vaut 0, on perd deux euros. Sinon, on en remporte 5.
Ainsi, $E(Z) = 7E(Y) - 2 = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$. L'espérance est négative, ce jeu est donc au désavantage du joueur.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On note X le nombre de jetons gagnants tirés. X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{10}$. L'espérance de X vaut $2 \times \frac{1}{10} = 0{,}2$

On note Y le gain algébrique d'un joueur. Si X représente le nombre de jetons gagnants tirés, le gain est de $20X$. La participation au jeu étant de 10 euros, le gain Y vaut $Y = 20X - 10$.
On a donc $E(X) = 20E(X) - 10 = 20 \times 0{,}2 - 10 = -6$. Le jeu est au désavantage du joueur.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

On a $E[X] = 2 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$ et

$$V(X) = \frac{1}{2}\left(2 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2 + \frac{5}{8}\left(-1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2 = \frac{1563}{512} \simeq 3{,}05$$

Par ailleurs, $E[Y] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ et

$$V(Y) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-2 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{89}{36} \simeq 2{,}47$$

La variable X correspond au jeu proposé ici. L'espérance est négative : le jeu est désavantageux pour le joueur

Pour la loi de Y : Dans une urne sont placées six boules. Une participation coûte deux euros. Deux boules sont perdantes, 3 rapportent 3 euros et 1 rapporte 4 euros.

On a $Z = 2X + 3Y$ et donc $E(Z) = 2E(X) + 3E(Y) = -2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} > 0$. Le jeu est avantageux pour le joueur.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

D'une part, $V(X) = (1-p)E(X)$. Ainsi, $p = \frac{1}{3}$. Par ailleurs, $E(X) = np = 6$ d'où $n = 18$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

On a $E(X) = 10 \times 0{,}3 = 3$, $V(X) = 10 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 2{,}1$ et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}1} \simeq 1{,}449$ puis
$E(Y) = 8 \times 0{,}2 = 1{,}6$, $V(Y) = 8 \times 0{,}2 \times (1 - 0{,}2) = 1{,}28$ et $\sigma(X) = \sqrt{1{,}28} \simeq 1{,}131$.

Par ailleurs, $E(Z) = 2E(X) - 3E(Y) = 2 \times 3 - 3 \times 1{,}6 = 1{,}2$. De plus, X et Y étant indépendantes, on a $V(Z) = V(2X) + V(-3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 19.92$ et $\sigma(Z) = \sqrt{19.92} \simeq 4{,}463$

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Partie A : Étude de cas particuliers

1. (a) La loi de X est la suivante.

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La probabilité d'avoir un tiroir vide correspond au cas où les deux objets sont rangés dans le tiroir 1 (probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) ou dans le tiroir 2 (même probabilité), soit une probabilité total de $\frac{1}{2}$. La probabilité qu'il y ait un tiroir vide s'obtient par complément à 1.

(b) $E[X] = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.

2. (a) On peut effectuer $3 \times 3 \times 3 = 27$ rangements différents.
   (b) Si le tiroir 1 n'est pas utilisé, on peut effectuer $2 \times 2 \times 2 = 8$ rangements différents.
   (c) X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{8}{27}$.
   (d) On considère la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + X_3$. X donne le nombre de tiroirs vides à l'issue de l'expérience. $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$. Si l'on fait un grand nombre de fois cette expérience, la moyenne de tiroirs vide se rapprochera de $\frac{8}{9}$.

Partie B : Cas général

1. Il y a n^n rangements dans les tiroirs possibles et $(n-1)^n$ rangements dans les tiroirs qui laissent le tiroir 1 vide. Ainsi, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{(n-1)^n}{n^n}$. Puisque Y_1 est une variable de Bernoulli, c'est également son espérance.
2. Le nombre moyen de tiroirs vides est l'espérance de $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$. Les Y_k ont tous pour espérance $\frac{(n-1)^n}{n^n}$. Ainsi, $E(X) = n \times \frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$.

Loi des grands nombres

► Correction 16 – Voir l'énoncé

L'espérance de M_n vaut 4 et sa variance $\frac{2}{n}$. La variance de M_n est inférieure à 10^{-4} dès que $n \geqslant 2 \times 10^4$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

On a $|X - 4| \geqslant 2$ si et seulement si $X \in]2;6[$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant \frac{V(X)}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \in]2;6[) \geqslant \frac{3}{4}$.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \geqslant \frac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$. Or, $(2\sigma(X))^2 = 4\sigma(X)^2 = 4V(X)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \frac{1}{4}$ et donc $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 2\sigma(X)) = 1 - \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \geqslant \frac{3}{4}$.

De même, on montrer que $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 3\sigma(X)) \geqslant \frac{8}{9}$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Notons X la variable aléatoire qui donne le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard. D'après l'énoncé, on a donc $E(X) = 24000$ et $V(X) = 6000$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000 peut être majorée comme suit :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 1000) \leqslant \frac{V(X)}{1000^2} = 0{,}006.$$

De la même manière,

$$\mathbb{P}(|X-E(X)| \geqslant 100) \leqslant \frac{V(X)}{100^2} = 0{,}6.$$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

On a $S = T_1 + T_2 + T_3$. Ainsi, $E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 18$. En moyenne, un automobiliste qui a deux personnes devant lui dans la file d'attente attendra 18 minutes avant de pouvoir repartir.

Par ailleurs, puisque T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes, on a $V(S) = V(T_1) + V(T_2)V(T_3) = 3$.

On cherche alors à minorer la probabilité $\mathbb{P}(S \in]14;22[)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(S \in]18-4;18+4[)$.

La probabilité recherchée est donc $\mathbb{P}(|S-18| < 4)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|S-E(S)| < 4)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel δ strictement positif, $\mathbb{P}(|S-E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$.
En prenant $\delta = 4$, on a donc $\mathbb{P}(|S-E(S)| \geqslant 4) \leqslant \dfrac{3}{16}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|S-E(S)| < 4) = 1 - \mathbb{P}(|S-E(S)| \geqslant 4) \geqslant 1 - \dfrac{3}{16}$. On a donc $\mathbb{P}(|S-E(S)| < 4) \geqslant \dfrac{13}{16}$.

Or, $\dfrac{13}{16} = 0{,}8125 > 0{,}81$. Finalement, la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

X suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $\dfrac{1}{6}$.
Ainsi, $E[X] = 3600 \times \dfrac{1}{6} = 600$ et $V(X) = 3600 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = 500$.
Par ailleurs, $X \in]480;720[$ correspond à $X - 600 \in]-120;120[$ c'est-à-dire $|X-600| < 120$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Techebychev, $\mathbb{P}(|X-E[X]| \geqslant 120) \leqslant \dfrac{500}{120^2} = 0{,}035$.
Ainsi, $\mathbb{P}(|X-E[X]| < 120) \geqslant 1 - 0{,}035 = 0{,}965$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

X suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $\dfrac{1}{6}$.
Ainsi, $E[X] = 3600 \times \dfrac{1}{6} = 600$ et $V(X) = 3600 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = 500$.
Par ailleurs, $X \in]480;720[$ correspond à $X - 600 \in]-120;120[$ c'est-à-dire $|X-600| < 120$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Techebychev, $\mathbb{P}(|X-E[X]| \geqslant 120) \leqslant \dfrac{500}{120^2} = 0{,}035$.
Ainsi, $\mathbb{P}(|X-E[X]| < 120) \geqslant 1 - 0{,}035 = 0{,}965$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

L'inégalité de concentration pour M_n s'écrit $\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X)}{n\delta^2} = \dfrac{2}{n\delta^2}$.

En prenant $\delta = 0{,}05$, on obtient $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geqslant 0{,}05) \leqslant \dfrac{2}{0{,}0025n}$, qui est inférieur à 0,01 lorsque $n \geqslant 80000$.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

S_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,8. Ainsi, $E[S_n] = 0{,}8n$ et $V(S_n) = 0{,}16n$.

Si $S_n \geqslant 200$, alors $S_n - 0{,}8n \geqslant 200 - 0{,}8n$. Puisque $n < 250$, alors $200 - 0{,}8n > 0$ et donc, par croissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$, $|S_n - 0{,}8n| \geqslant 200 - 0{,}8n$.

Ainsi, $\mathbb{P}(S_n \geqslant 200) \leqslant \mathbb{P}(|S_n - 0{,}8n| \geqslant 200 - 0{,}8n)$. Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|S_n - 0{,}8n| \geqslant 200 - 0{,}8n) \leqslant \dfrac{0{,}16n}{(200 - 0{,}8n)^2}$, d'où le résultat voulu.

On a $\dfrac{0{,}16n}{(200 - 0{,}8n)^2} \leqslant 0{,}05$ si et seulement si $0{,}032n^2 - 16{,}16n + 2000 \geqslant 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines valent environ 217,06 et 287.94. En particulier, si $n < 250$, cette quantité est positive pour $n \leqslant 217$. La compagnie peut vendre 217 billets : elle aura alors moins de 5% de chance que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{18}{37}$. Son espérance vaut $\dfrac{18n}{37}$ et sa variance $\dfrac{306n}{1369}$.

On a par ailleurs $X_n = Y_n \times 1 + (n - Y_n) \times (-1) = 2Y_n - n$.

Ainsi, $E[X_n] = 2E[X_n] - n = -\dfrac{n}{37}$ et $V(X_n) = 4V(Y_n) = \dfrac{1224n}{1369}$.

On cherche alors $P(X_n < 0)$. Or, si $X_n \geqslant 0$, alors $X_n + \dfrac{n}{37} \geqslant \dfrac{n}{37}$ et donc $\left|X_n + \dfrac{n}{37}\right| \geqslant \dfrac{n}{37}$.

Ainsi, $P(X_n \geqslant 0) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_n + \dfrac{n}{37}\right| \geqslant \dfrac{n}{37}\right)$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}\left(\left|X_n + \dfrac{n}{37}\right| \geqslant \dfrac{n}{37}\right) \leqslant \dfrac{\frac{1224n}{1369}}{\frac{n^2}{37^2}} = \dfrac{1224}{n}$.

Ainsi, en utilisant le complémentaire, $P(X_n < 0) \geqslant 1 - \dfrac{1224}{n}$. Or, $1 - \dfrac{1224}{n} \geqslant 0.95$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{1224}{0{,}05} = 22480$.

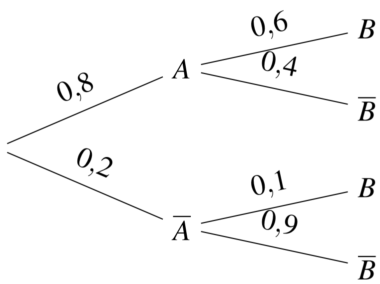
Un joueur qui fait 22480 parties a plus de 95% de chances de perdre de l'argent à l'issue de ces parties.

Exercices de synthèse

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Partie I

1. On complète l'arbre de probabilités modélisant la situation



2. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.
3. $(A;\overline{A})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}5.$$

4. X_1 prend les valeurs 0 et 1, elle suit donc une loi de Bernoulli. Son paramètre (et donc son espérance) vaut 0,8.
   De même, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5. On a donc $E(X_2) = 0{,}5$.
   Ainsi, $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3$. En moyenne, un élève obtient une note de 1,3 au premier exercice.
5. On a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}48$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - (0{,}18 + 0{,}48) = 0{,}34$.
6. On a $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}18 + 1^2 \times 0{,}34 + 2^2 \times 0{,}48 = 2{,}26$.
   D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2{,}26 - 1{,}3^2 = 0{,}57$.
7. On a $V(X_1) = 0{,}8 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}16$ et $V(X_2) = 0{,}5 \times (1 - 0{,}5) = 0{,}25$.
   Ainsi, $V(X_1) + V(X_2) = 0{,}41 \neq V(X)$.
   Ce résultat n'est pas surprenant puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie II

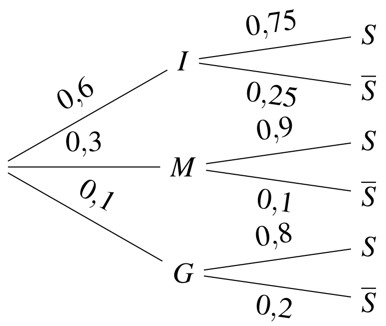
1. Y compte le nombre de succès (la réponse donnée est exacte) d'une répétitions de 8 épreuves identiques et indépendantes. La probabilité de succès est de $\dfrac{3}{4}$. Ainsi, Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(8; \dfrac{3}{4}\right)$.
2. On a $\mathbb{P}(Y = 8) = \dbinom{8}{8} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^8 \times \left(1 - \dfrac{3}{4}\right)^{8-8} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.
3. On a $E(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} = 6$ et $V(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} \times \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Partie III

1. On a $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 1{,}3 + 6 = 7{,}3$.
   De plus, puisque X et Y sont indépendantes, on a $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = 2{,}07$.
2. (a) On a $E[M_n] = E[Z_1] = 7{,}3$.
   (b) On a $V(M_n) = \dfrac{V(Z_1)}{n} = \dfrac{2{,}07}{n}$ et donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}}$.
   Ainsi, $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2{,}07}}{0{,}5} \leqslant \sqrt{n}$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0; +\infty[$, on a alors $n \geqslant \dfrac{2{,}07}{0{,}25}$. Or, $\dfrac{2{,}07}{0{,}25} = 8{,}28$. L'entier recherché est donc $n = 9$.
   (c) On a $6{,}3 < M_n < 8{,}3$ si et seulement si $M_n \in]6{,}3; 8{,}3[$ soit $M_n \in]7{,}3 - 1; 7{,}3 + 1[$ c'est-à-dire $|M_n - 7{,}3| < 1$.
   Or, $E(M_n) = 7{,}3$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{1^2}$ et donc $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{2{,}07}{n}$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| < 1) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \geqslant 1 - \dfrac{2{,}07}{n}$.
   D'après la question précédente, on a $n \geqslant 9$.
   Ainsi, $\dfrac{2{,}07}{n} \leqslant \dfrac{2{,}07}{9}$ et $1 - \dfrac{2{,}07}{n} \geqslant 1 - \dfrac{2{,}07}{9}$. Or, $1 - \dfrac{2{,}07}{9} = 0{,}77$.
   Ainsi, on a bien $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| < 1) \geqslant 0{,}77 \geqslant 0{,}75$.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

1. On complète l'arbre comme suit.



2. On a $P(I \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
3. $(I; M; G)$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}8.$$
4. On a $P_S(I) = \dfrac{P(S \cap I)}{P(S)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}8} \simeq 0{,}563$.
5. (a) Puisque les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, X compte le nombre de succès (le client est satisfait) d'une répétition de 30 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(30; 0{,}8)$.
   (b) D'après la calculatrice, on a $P(X \geqslant 25) \simeq 0{,}428$.
6. Notons Y le nombre de clients non satisfaits lorsque l'on interroge n clients.
   Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0{,}2)$.
   On a alors $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$ puisque Y est à valeurs entières.
   Or, $P(Y = 0) = \dbinom{8}{0} \times 0{,}2^0 \times (1 - 0{,}2)^n = 0{,}8^n$.
   Ainsi, $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}8^n \Leftrightarrow -0{,}8^n \geqslant -0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}01$.
   Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, on a alors $\ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}01)$ soit $n \ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01)$ et donc $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$. Or, $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \simeq 20{,}6$. L'entier recherché est donc 21.
7. (a) On a $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$.
   De plus, puisque T_1 et T_2 sont indépendantes, $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.
   (b) On cherche $P(5 \leqslant T \leqslant 9)$.
   Puisque T est à valeurs entières, cette probabilité est égale à $P(4 < T < 10)$. Or, on a $4 < T < 10$ si et seulement si $7 - 3 < T < 7 + 3$ c'est-à-dire $|T - 7| < 3$ et donc $|T - E(T)| < 3$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(T)}{3^2}$.
   On obtient donc $P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   Ainsi, $P(|T - E(T)| < 3) = 1 - P(|T - E(T)| \geqslant 3) \geqslant 1 - \dfrac{1}{3}$ et finalement, $P(|T - E(T)| < 3) \geqslant \dfrac{2}{3}$.