1. Cours : Fonctions trigonométriques

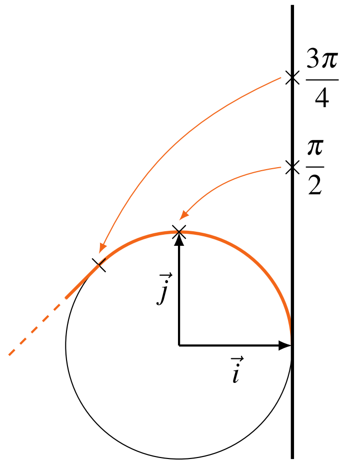
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

1 Rappels

1.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.

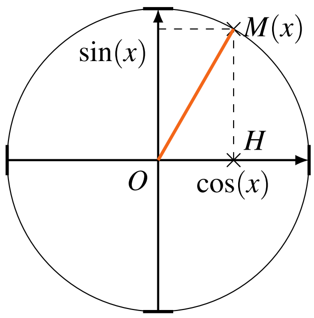


Propriété 1 : Deux réels dont la différence est le produit de 2π et d'un nombre entier ont la même image par M.

1.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2 : Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

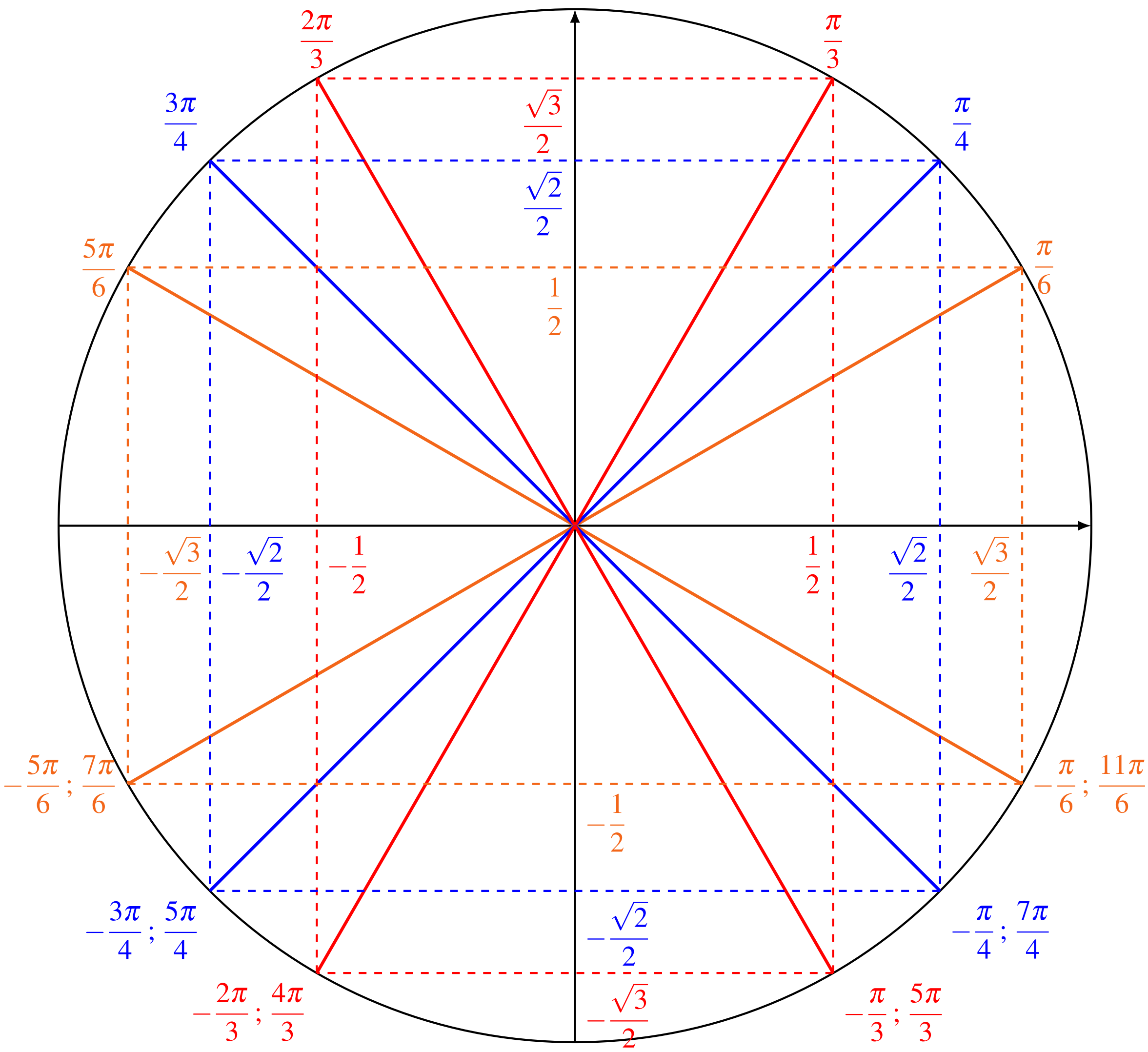
- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$;
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$.



■ **Exemple 1 :** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes.

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■



Propriété 2 : Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \qquad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+\sin(x)}$.

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \geqslant \sin(x) \geqslant -1$, alors $3 \geqslant 2+\sin(x) \geqslant 1 > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$ et donc, en multipliant par $1+x$ qui est strictement positif sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1+x}{3} \leqslant f(x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+x}{3}\right) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

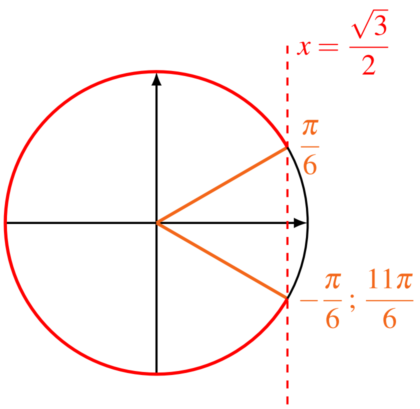
1.3 Résolution d'équation et d'inéquation

■ **Exemple 3 :** Les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$. ■

■ **Exemple 4 :** Le solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $[0;2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. ■

■ **Exemple 5 :** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi]$ est l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$.

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$. ■

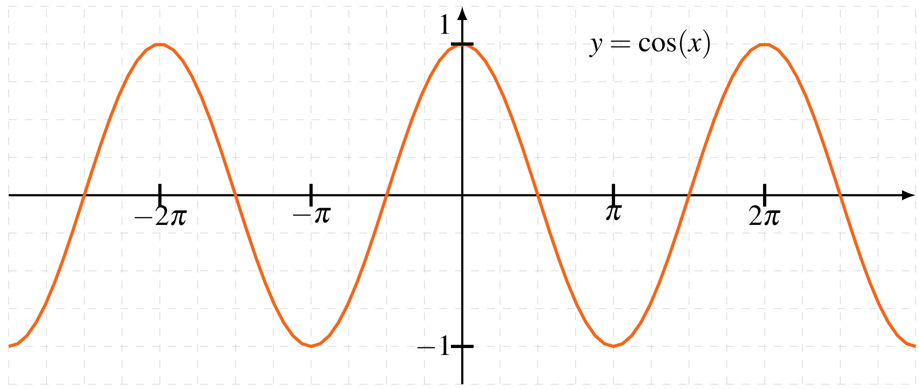


Il faut donc faire attention à l'intervalle de résolution.. Dans tous les cas, le cercle trigonométrique sera votre plus précieux allié.

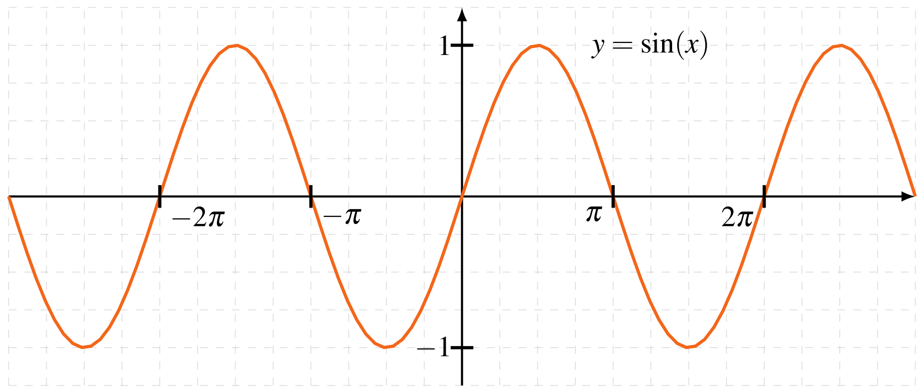
2 Fonctions trigonométriques

2.1 Définition et variations

Définition 3 : La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\sin(x)$	0		$-$		0		$+$		0

Propriété 3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$; la fonction sinus est impaire.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors que la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■ **Exemple 6 :** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Propriété 4 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$;
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

■ **Exemple 7 :** $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. ■

2.2 Dérivée des fonctions trigonométriques

Propriété 5 : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

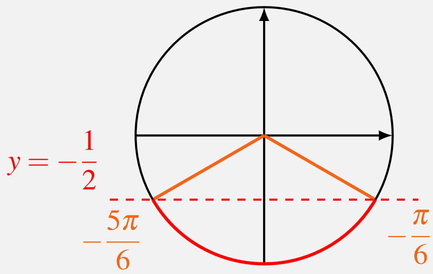
$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

■ **Exemple 8 :** On considère la fonction $g : x \mapsto 2\cos(x) - x$ définie sur $I = [-\pi; \pi]$. g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = -2\sin(x) - 1$.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.
Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ est $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$. On peut alors construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$



x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\pi - 2$	$\searrow$	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	$\searrow$	$-2-\pi$

■

Il est également possible de dérivée des fonctions composées avec le cosinus ou le sinus.

Propriété 6 : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont également dérivables sur cet intervalle I et on a

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u) \qquad \text{et} \qquad (\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$$

■ Exemple 9 : Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin(3x^2 - 4x + 5)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 4)\sin(3x^2 - 4x + 5)$. ■

Propriété 7 : Soit a un réel non nul.

- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(ax)}{a}$.

Démonstration 1 : Il suffit de dériver. Attention au signe ! □

■ Exemple 10 : Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(9x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x) + \dfrac{5}{9}\cos(9x)$. ■

■ Exemple 11 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \cos(x)\sin(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \sin'(x) \times \sin(x)$.
Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie pour tout réel x par $G(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$. ■

■ Exemple 12 : On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^3(x)\,dx$ définie sur $\mathbb{R}$ et $I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

D'une part, pour tout réel x,

$$f(x) = \sin(x) \times \sin^2(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x).$$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx + \int_0^{\pi} (-\sin(x)\cos^2(x))\,dx$. D'une part,

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2.$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on a $-\sin(x)\cos^2(x) = \cos'(x) \times \cos^2(x)$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sin(x)\cos^2(x)$ sur $[0;\pi]$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^3(x)}{3}$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} (-\sin(x)\cos^2(x))\,dx = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

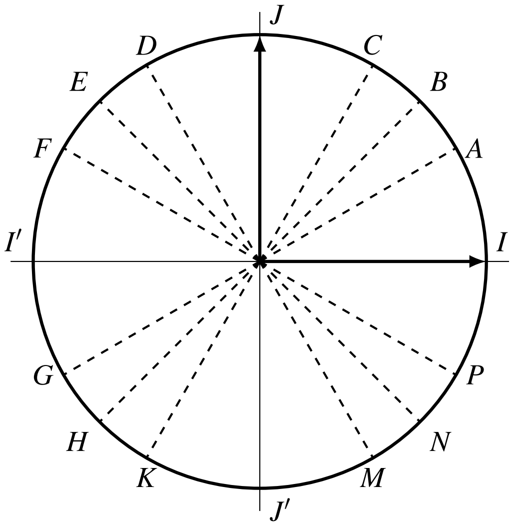
Finalement, $I = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$. ■

2. Exercices

Rappels

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants.

π	2π	-3π	18π
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{17\pi}{2}$	$\dfrac{-7\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{-5\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$
$\dfrac{-7\pi}{4}$	$\dfrac{19\pi}{3}$	$\dfrac{-37\pi}{6}$	$\dfrac{23\pi}{4}$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes.

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in]-\pi;\pi]$.

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos(x) = 0$ $\quad$ $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [0;2\pi[$.

$\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos(x) = 0$ $\quad$ $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Résoudre l'équation $\cos(x)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$ sur $[0;2\pi]$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

$\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) \geqslant 0$ $\qquad$ $\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

$2\cos(x)+1 > 2$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $1-\sqrt{3} \leqslant -2\cos(x)+1 \leqslant 0$

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

Fonctions trigonométriques

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x)+x$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

$f_3 : x \mapsto \cos(\mathrm{e}^x)$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto (\sin(x))^3$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \ln(1+\cos(x)^2)$

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Le but de cet exercice est de prouver d'une nouvelle manière que pour tout réel x, on a $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (\cos(x))^2+(\sin(x))^2$.

1. Que vaut $f(0)$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Conclure.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x+\cos(x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, définie sur $[0;2\pi]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0;2\pi]$ et que pour tout réel $x \in [0;2\pi]$, $f'(x) = \dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
2. Construire le tableau de variations de f sur $[0;2\pi]$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $x \geqslant \sin(x)$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$.

1. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout réel x, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.
4. En déduire que pour tout réel x, $\sin(\mathrm{e}^{-x^2}) \geqslant 0$.
5. En déduire le tableau de variations de f.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin(x)$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire que l'équation $\sin(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Quelle est-elle ?

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ et $g(x) = \sin(\ln x)$. Montrer que f est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On admet que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$. Donner une primitive de ces fonctions.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(5x)$	$f_2 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
$f_3 : x \mapsto 2x\cos(x^2)$	$f_4 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Calculer les intégrales suivantes

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$	b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\,\mathrm{d}x$	c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$
d. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)^3\,\mathrm{d}x$	e. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(2x^2)$	f. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x$

► Exercice 20 – Voir le corrigé

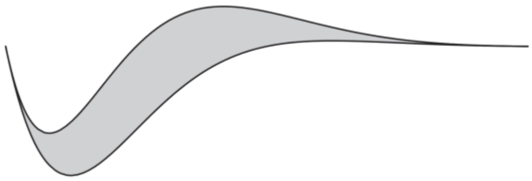
À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 22 (Guyane 2018) – Voir le corrigé

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos(x).$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$

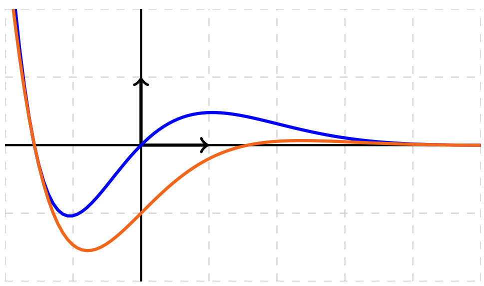
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos(x) - 1).$$

4. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et en déduire les variations de f sur cet intervalle.

Partie B : Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le logo correspond au domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ ainsi que les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.



1. Calculer $f(x) - g(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire que la courbe de f est toujours au dessus de la courbe de g.
3. Soit H la fonction définie pour tout réel x par $H(x) = \left(-\dfrac{\cos(x)}{2} - \dfrac{\sin(x)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x) + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire l'aire du logo en unité d'aires.

► Exercice 23 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

On considère les équations différentielles $(E)\ :\ y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ et $(E_0)\ :\ y' = y$.

1. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_0).
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 2\cos(x) + \sin(x)$, que l'on admet définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que h est solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.

► Exercice 24 (Amérique du Nord 2024) – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad J_n = \int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0
2. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$
   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. (a) Rappeler la formule d'intégration par parties.
   (b) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différents, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
   $$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```python
1 from math import *
2 def seuil():
3   n = 0
4   I = 2
5   ...
6     n = n + 1
7     I = (1 + exp(-n * pi))/(n*n + 1)
8   return n
```

Pour aller plus loin...

► Exercice 25 (Fonction tangente) – Voir le corrigé

Pour x tel que $\cos(x) \neq 0$, on appelle tangente de x, noté $\tan(x)$, le réel :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Partie A : Quelques valeurs

1. Que valent $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$?
2. On considère un réel $x \in \left]-\pi; \frac{-\pi}{2}\right[$ tel que $\sin(x) = -\frac{11}{61}$.
   (a) Que vaut $\cos(x)$?
   (b) Que vaut $\tan(x)$?
3. Résoudre l'inéquation $\tan(x) \leqslant 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Un peu d'étude de la tangente
On considère la fonction $x \mapsto \tan(x)$, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que la fonction tan est impaire.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$.
3. Justifier que tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et que tan est solution de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ sur cet intervalle.
4. En déduire le sens de variation de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Justifier que tan est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer les intervalles de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur lesquels cette fonction est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthogonal.
7. Déterminer l'unique primitive de tan sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut 0 en 0.

► Exercice 26 (Tension efficace) – Voir le corrigé

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b]. On appelle valeur efficace de la fonction f est égale à la racine carrée de la valeur moyenne de f^2 sur l'intervalle $[a,b]$.

En électricité, la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait un échauffement identique dans une résistance.

Dans le cas d'un régime sinusoïdal, l'intensité du courant est donnée par une fonction $i : t \mapsto I_{max}\sin(\omega t)$, où I_{max} est un réel positif et ω désigne la pulsation du signal. L'intervalle considérée est l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$;

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{I_{max}^2}{2}\left(x - \frac{\sin(\omega x)\cos(\omega x)}{\omega}\right)$ est une primitive de i^2 sur $[0;2\pi]$.
2. En déduire que l'intensité efficace d'un tel courant vaut $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

► Exercice 27 (Fonction arcsinus) – Voir le corrigé

L'objectif de l'exercice est de présenter la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Soit $x \in [-1;1]$. Justifier que l'équation $\sin(a) = x$, d'inconnue réelle a, possède exactement une solution sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Cette solution sera notée $\arcsin(x)$. On définit alors la fonction arcsin comme étant la fonction qui à un réel $x \in [-1;1]$ associe l'unique de l'équation $\sin(a) = x$ d'inconnue a **sur l'intervalle** $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit $x \in [-1;1]$. Que vaut $\sin(\arcsin(x))$? Que vaut $\arcsin(\sin(\pi))$?
3. Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $x \in]-1;1[$
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
5. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 28 (Intégrales de Wallis) – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Convergence de la suite (W_n)

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $W_n > 0$.
3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
4. Que peut-on en déduire sur la suite (W_n) ?

Partie B : Calcul du terme général

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
On pourra utiliser une intégration par parties en utilisant la fonction $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$ et en déterminant une fonction v telle que pour tout réel $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = \sin(x)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel p, on a
$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Partie C : Étude asymptotique

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. En s'aidant de la question **B1**, montrer que la suite (J_n) est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En s'aidant des questions **B1** et **A3**, montrer que pour tout entier naturel n, on a
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$
3. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} n W_n^2 = 1$.

3. Corrigés

Rappels

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

$\pi : I'$	$2\pi : I$	$-3\pi : I'$	$18\pi : I$
$\dfrac{\pi}{2} : J$	$\dfrac{3\pi}{2} : J'$	$\dfrac{17\pi}{2} : J$	$\dfrac{-7\pi}{2} : J$
$\dfrac{\pi}{6} : A$	$\dfrac{3\pi}{4} : E$	$\dfrac{-5\pi}{3} : C$	$\dfrac{8\pi}{3} : E$
$\dfrac{-7\pi}{4} : B$	$\dfrac{19\pi}{3} : C$	$\dfrac{-37\pi}{6} : A$	$\dfrac{23\pi}{4} : N$

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$	$\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$	$\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

Sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$....

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$

$\cos(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$

$\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}$

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

Sur l'intervalle $[0;2\pi[$...

$\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

$\cos(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$

▶ Correction 5 – Voir l'énoncé

Soit $x \in [0;2\pi]$, $\cos(x)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$ ssi $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Les solutions sont $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

▶ Correction 6 – Voir l'énoncé

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$...

$\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

$\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$

$\cos(x) \geqslant 0$ ssi $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4};\pi\right]$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$...

- $2\cos(x)+1>2$ ssi $\cos(x)>\dfrac{1}{2}$ ssi $x\in\left]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right[$.
- $-\dfrac{1}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x\in\left[-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
- $1-\sqrt{3}\leqslant-2\cos(x)+1\leqslant 0$ ssi $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\cos(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$ ssi $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Soit x un réel.

$$(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=\cos(x)^2+2\cos(x)\sin(x)+\sin(x)^2+\cos(x)^2+2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)^2$$

Ainsi, $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=2(\cos(x)^2+\sin(x)^2)=2$.

Fonctions trigonométriques

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $\cos(x)\leqslant-1$ et donc $2+\cos(x)\leqslant 1$. En particulier, $2+\cos(x)\neq 0$. f est définie sur $\mathbb{R}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=\dfrac{2}{5}$ et $f(-\pi)=\dfrac{1}{2+\cos(-\pi)}=\dfrac{1}{2-1}=1$.

Par ailleurs, pour tout réel x, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donc $1\leqslant 2+\cos(x)\leqslant 3$ et finalement $1\geqslant\dfrac{1}{2+\cos(x)}\geqslant\dfrac{1}{3}$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x...

- $f_1'(x)=-3\sin(3x)+1$.
- $f_2'(x)=\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\times(-\sin(x))=\cos(x)^2-\sin(x)^2$.
- $f_3'(x)=-\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)$.
- $f_4'(x)=3\cos(x)\sin(x)^2$.
- $f_5'(x)=\dfrac{\cos(x)(2+\cos(x))-\sin(x)\times(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2}=\dfrac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2}=\dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
- $f_6'(x)=\dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On a $f(0)=\cos(0)^2+\sin(0)^2=1^2+0^2=1$.

Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\sin(x)=0$.

f est donc constante : pour tout réel x, on a $f(x)=f(0)=1$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=1-\sin(x)$. Or, puisque pour tout réel x, $\sin(x)\leqslant 1$, on en déduit que pour tout réel x, $f'(x)\geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

La tangente à la courbe de f à l'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=x+1$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

On considère la fonction $f : x\mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, définie sur $[0;2\pi]$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet, pour tout réel x, $2+\cos(x)\geqslant 1>0$). De plus, pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{\cos(x)(2+\cos(x))-\sin(x)\times(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2}=\frac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2}=\frac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}.$$

$f'(x)$ est donc du signe de $1+2\cos(x)$.
Or, sur $[0;2\pi]$, $1+2\cos(x)\geqslant 0$ ssi $\cos(x)\geqslant -\dfrac{1}{2}$ soit $x\in\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right]$.

x	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=x-\sin(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $x\geqslant 0$,
$f'(x)=1-\cos(x)\geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)\geqslant f(0)$, soit $x-\sin(x)\geqslant 0$ et donc $x\geqslant\sin(x)$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X=0$ et $\lim\limits_{Y\to 0}\cos(x)=1$. Par composition de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.
2. f est la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(\mathrm{e}^{-x^2})$.
3. D'une part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2}\geqslant 0$. Par ailleurs, pour tout réel x, $-x^2\leqslant 0$ et, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant \mathrm{e}^0$ soit $\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant 1$.
4. Pour tout réel x, $0\leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\leqslant 1$. Or, la fonction sin est croissante sur $[0;1]$. Ainsi, pour tout réel x, $\sin(0)\leqslant\sin(\mathrm{e}^{-x^2})\leqslant\sin(1)$ et en particulier, $\sin(\mathrm{e}^{-x^2})\geqslant 0$.
5. Pour tout réel x, $f'(x)$ est donc du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\sin(1)$	$\nearrow$	1

► Correction 16 – Voir l'énoncé

1. f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = 1-\cos(x) \geqslant 0$ car $\cos(x) \leqslant 1$. Par ailleurs, f' s'annule uniquement en 0. f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
2. On a $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}+1 \leqslant 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-1 \geqslant 0$. Par ailleurs, f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une solution sur cet intervalle.
   De plus, la fonction f étant strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, cette solution est unique.
   Or, $f(0) = 0$. 0 est donc l'unique solution sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $x-\sin(x) = 0$, soit $\sin(x) = x$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ ».
   - On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sin(1) \geqslant 1$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. En appliquant la fonction sinus qui est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a alors $\sin(0) \leqslant \sin(u_{n+1}) \leqslant \sin(u_n) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. On a donc bien $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente, de limite $\ell \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. La fonction sinus étant continue sur cet intervalle, on a alors $\sin(\ell) = \ell$ et donc $\ell = 0$ d'après la question 2.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 0$, posons $u(x) = \sin(\ln(x))$ et $v(x) = \cos(\ln(x))$. u et v sont dérivables et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$ et $v'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + \frac{x}{2}\left(\frac{\cos(\ln(x))}{x} - \left(-\frac{\sin(\ln(x))}{x}\right)\right) = \sin(\ln(x)).$$

f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Une primitive de $f_1 : x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(5x)$ est $F_1 : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{2}{5}\sin(5x)$.

Une primitive de $f_2 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ est $F_2 : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$. On a alors $f_3 = u'\cos(u)$, une primitive de f_3 est donc $\sin(u)$ soit $x \mapsto \sin(x^2)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$. On a alors $f_4 = u'u = \frac{1}{2}(2u'u)$.

Une primitive de f_4 est donc $\dfrac{u^2}{2}$ soit $x \mapsto \dfrac{\sin(x)^2}{2}$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

Calculer les intégrales suivantes

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0.$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/4} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\cos(0)) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/6} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} - \left(-\frac{\cos(0)}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

d. Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$. On a alors $\cos(x)\sin(x)^3 = u'(x) \times u(x)^3 = \dfrac{1}{4} \times 4u'(x)u(x)^3$. Une primitive de $x \mapsto \cos(x)\sin(x)^3$ est donc $x \mapsto \dfrac{\sin(x)^4}{4}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(x)^4}{4}\right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$

e. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2$. On a alors $x\cos(2x^2) = \dfrac{1}{4}u'(x)\cos(u(x))$.

Une primitive de $x \mapsto x\cos(2x^2)$ est donc $x \mapsto \dfrac{\sin(2x^2)}{4}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(2x^2) = \left[\frac{\sin(2x^2)}{4}\right]_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{\sin(2\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} = 0 - 0 = 0.$

f. Pour tout réel $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ en posant $u(x) = \cos(x)$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ est donc $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right])0^{\pi/4} = \frac{1}{\cos(\pi/4)} - \frac{1}{\cos(0)} = \sqrt{2} - 1.$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ on cherche v tel que $v'(x) = \cos(x)$: on prend donc $v : x \mapsto \sin(x)$. D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v(x)\,\mathrm{d}x$.Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - (-0-(-1)) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Notons $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ on cherche v tel que $v'(x) = \cos(x)$: on prend donc $v : x \mapsto \sin(x)$. D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$

Cherchons alors à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x, on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ on cherche v tel que $v'(x)=\sin(x)$: on prend donc $v : x \mapsto -\cos(x)$.

D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^x\cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\mathrm{e}^x\cos(x))\,\mathrm{d}x = 1+I$.

Ainsi, en reprenant la première IPP, on a $I=\mathrm{e}^{\pi/2}-(1+I)$ et donc $2I=\mathrm{e}^{\pi/2}-1$ et finalement, $I=\dfrac{\mathrm{e}^{\pi/2}-1}{2}$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Partie A : Étude de la fonction f

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant$ et $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$. En ajoutant ces inégalités puis en ajoutant 1 à chauqe membre, on a que pour tout réel x, $-1 \leqslant -\cos(x)+\sin(x)+1 \leqslant 3$, puis, en multipliant par e^{-x} qui est positif, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)+\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos(x)-1)$.
4. Sur $[-\pi;\pi]$, f' est du signe de $2\cos(x)-1$.
   Or, sur cet intervalle, $2\cos(x)-1 \geqslant 0$ ssi $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie B : Aire du logo

1. Pour tout réel x, $f(x)-g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+1)$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x}>0$ et $\sin(x)+1 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)-g(x) \geqslant 0$: la courbe de f est toujours au dessus de la courbe de g.
3. Pour tout réel x,
$$H'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{2}-\frac{\cos(x)}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}-1\right)\times(-\mathrm{e}^{-x}).$$
   Ainsi,
$$H'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\sin(x)}{2}-\frac{\cos(x)}{2}-\left(-\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sin(x)}{2}-1\right)\right) = (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}.$$
   H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
4. L'aire du logo en unité d'aires vaut $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (f(x)-g(x))$.
   Or, pour tout réel x, $f(x)-g(x) = (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}$. Une primitive de $f-g$ est H.
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (f(x)-g(x)) = [H(x)]_{-\pi/2}^{3\pi/2} \simeq 2{,}4$. L'aire du logo est d'environ 2,4 unités d'aire.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

1. Les solutions de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^x$, pour C réel.
2. Pour tout réel x, on a $f'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$ et
$$h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = -2\sin(x) + \cos(x) = h'(x).$$
Ainsi, h est bien solution de (E).
3. Puisque h est solution de (E), on a $h' = h - \cos(x) - 3\sin(x)$ et donc $-\cos(x) - 3\sin(x) = h - h'$.
On a f solution de (E) si et seulement si $f' = f - \cos(x) - 3\sin(x) = f - (h - h')$ si et seulement si $f' - h' = f - h$ si et seulement si $(f - h)' = f - h$.
Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).
4. Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$, pour C réel.
5. On cherche C tel que $C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$. On a donc $C + 2 = 0$ et donc $C = -2$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
Une primitive de sin étant $-\cos$, on a $I_0 = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$.
2. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
Ainsi, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) > 0$ et donc $I_n \geqslant 0$.
   (b) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \times (\mathrm{e}^{-x} - 1)$.
Or, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ et donc $\mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$.
Ainsi, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant 0$.
Alors $\displaystyle\int_0^\pi (\mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x))\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ soit $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
Finalement, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) D'après la question 2a, la suite (I_n) est minorée.
D'après la question 2b, la suite (I_n) est décroissante.
Ainsi, la suite (I_n) converge.
3. (a) Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$.
Ainsi, pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.
En intégrant cette inégalité, on a donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   (b) Une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}$ est $x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{x}\right]_0^\pi = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$.
   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. (a) On rappelle que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.
D'une part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\left\{\begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} & u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x) \end{array}\right.$
D'après la formule d'intégration par parties,
$$I_n = \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-n\mathrm{e}^{-nx}) \times (-\cos(x))\,\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - n\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n.$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\begin{cases} w(x) = \sin(x) & w'(x) = \cos(x) \\ p(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n} & p'(x) = e^{-nx} \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right)\cos(x)\,dx = 0 - 0 + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx = \frac{1}{n}J_n.$$

(b) On a donc $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$ donc $J_n = nI_n$. Or, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$.

Ainsi, $(n^2+1)I_n = 1 + e^{-n\pi}$ et finalement $I_n = \dfrac{1+e^{-n\pi}}{1+n^2}$.

5.
```
from math import *
def seuil():
  n = 0
  I = 2
  while I >= 0.1:
    n = n+1
    I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
  return n
```

Pour aller plus loin...

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A : Quelques valeurs

1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$

   $\tan\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

2. Puisque $x \in \left]-\pi; \dfrac{-\pi}{2}\right[$, alors $\cos(x) \leqslant 0$. De plus, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

   Ainsi, $\cos(x)^2 = 1 - \dfrac{121}{3721} = \dfrac{3600}{3721}$ et donc $\cos(x) = -\sqrt{\dfrac{3600}{3721}} = -\dfrac{60}{61}$ Ainsi, $\tan(x) = \dfrac{-\frac{11}{61}}{-\frac{60}{61}} = \dfrac{11}{60}$.

3. Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors $\cos(x) > 0$, $\tan(x)$ est donc du signe de $\sin(x)$.

   Ainsi, $\tan(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.

Partie B : Un peu d'étude de la tangente

1. L'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ est centré en 0.

   De plus, pour tout réel x de cet intervalle, $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

   La fonction tan est impaire.

2. Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $1 + (\tan(x))^2 = 1 + \dfrac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \dfrac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{(\cos(x))^2} = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.

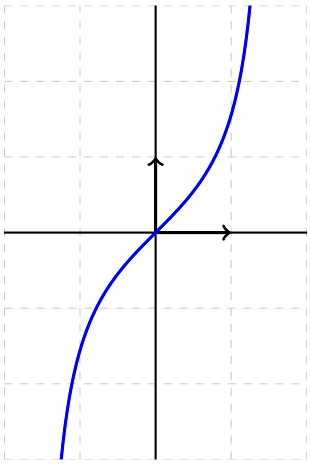
3. tan est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule

pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\tan(x)^2$$

tan est solution de l'équation différentielle $y' = 1+y^2$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

4. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) \geqslant 0$. tan est donc croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
5. La fonction $\tan' : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a $\tan''(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^4} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$. $\tan''$ est donc du signe de sin. Or, la fonction sinus est négative sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. tan est donc concave sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et convexe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
6. On trace la courbe représentative de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthogonal.



7. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. De plus, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$.
   Les primitives de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont donc les fonctions $x \mapsto -\ln(\cos(x)) + C$, où C est un réel.
   Or, $-\ln(\cos(0)) = -\ln(1) = 0$. L'unique primitive de tan sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut 0 en 0 est donc la fonction $x \mapsto -\ln(\cos(x))$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{I_{max}^2}{2}\left(x - \frac{\sin(\omega x)\cos(\omega x)}{\omega}\right)$. f est dérivable et pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{I_{max}^2}{2}\left(1 - \frac{\omega\cos(\omega x)\cos(\omega x) - \omega\sin(\omega x)\sin(\omega x)}{\omega}\right) = \frac{I_{max}^2}{2}\left(1-\cos^2(\omega x)+\sin^2(\omega x)\right).$$

En rappelant que pour tout réel X, $\cos^2(X)+\sin^2(X) = 1$, on obtient alors

$$F'(x) = \frac{I_{max}^2}{2}(\sin^2(\omega x)+\sin^2(\omega x)) = I_{max}^2\sin^2(\omega x) = i^2(x).$$

F est une primitive de i^2 sur $[0;2\pi]$. L'intensité efficace d'un tel courant vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}-0}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{F\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) - F(0)}.$$

Or, $F\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \dfrac{\pi I_{max}^2}{\omega}$ et $F(0) = 0$. Ainsi, l'intensité efficace vaut $\dfrac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\dfrac{\pi I_{max}^2}{\omega}} = \dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

1. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Par ailleurs, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $\sin(a) = x$ admet une unique solution sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout réel x dans l'intervalle $[-1;1]$.
2. Soit $x \in [-1;1]$. Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$.
   En revanche $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$.
   En particulier, on n'a pas $\arcsin(\sin(x)) = x$ pour tout réel x : cette égalité n'est vraie que sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ d'où $\cos^2(\arcsin(x)) + x^2 = 1$ et donc $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. Par ailleurs, puisque $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$.
   On en déduit que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$.
   Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$. En dérivant, on en déduit que pour tout $x \in]-1;1[$, $\arcsin'(x) \times \cos(\arcsin(x)) = 1$, soit $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Pour tout réel $x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on pose $u(x) = \arcsin(x)$ et $v(x) = x$. On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v'(x) = 1$.
   Par intégration par parties,
   $$\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = [x\arcsin(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$
   D'une part, $[x\arcsin(x)]_0^{1/2} = \dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) - 0 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.
   Par ailleurs, si l'on pose, pour tout réel x, $w(x) = 1 - x^2$, alors $w'(x) = -2x$.
   On a alors $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}$.
   Ainsi, une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ est la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Il en vient
   $$-\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\sqrt{1-x^2}]_0^{1/2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{1-0^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$
   Finalement,
   $$\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$
   Oui, il faut parfois s'attendre à ce genre de résultat pas franchement sexy.

► Correction 28 – Voir l'énoncé

Partie A : Convergence de la suite (W_n)

1. On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = 1$.
2. Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$. Il en vient que, pour tout entier naturel n, $W_n \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et donc

$$W_n \geqslant \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.$$

3. Pour tout entier naturel n,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)(\sin(x)-1)\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(x) \geqslant 1$ et $\sin(x) - 1 \leqslant 0$. Il en vient que $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$. La suite (W_n) est donc décroissante.
4. La suite (W_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Partie B : Calcul du terme général

1. Soit n un entier naturel.
On considère la fonction $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$ et $v : x \mapsto -\cos(x)$, définies sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout réel x de cet intervalle, on a alors $u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$.
Par intégration par parties, on obtient alors

$$W_{n+2} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \times \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, $\left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = 0$. Par ailleurs, pour tout réel x, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Ainsi,

$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(x) - \sin^{n+2}(x))\,\mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

On a donc $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
Finalement, on retrouve bien $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
2. Pour tout entier naturel p, on a alors

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4} = \cdots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}W_0.$$

Or, en factorisant chaque terme par 2, on a

$$2p(2p-2)(2p-4)\ldots \times 4 \times 2 = 2^p \times p(p-1)(p-2)\ldots \times 1 = 2^p p!.$$

On retrouve au numérateur le produit de tous les nombres impairs de 1 à $2p-1$ et au dénominateur le produit de tous les nombres pairs de 2 à $2p-2$. En multipliant numérateur et dénominateur par le produit $2p(2p-2)(2p-4)\ldots \times 4 \times 2$, on complète alors le produit du numérateur : on multiplie tous les nombres de 1 à $2p$: il s'agit tout simplement de $(2p)!$.
Finalement, pour tout entier naturel p, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p)^2}W_0 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.

De même, pour tout entier naturel p,

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}W_{2p-3} = \cdots = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times W_1.$$

En multipliant encore une fois le numérateur et le dénominateur par $2p(2p-2)(2p-4)... \times 4 \times 2$, on a alors $W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}W_1 = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.
Si vous savez manipuler la notation produit $\prod$, n'hésitez pas à l'utiliser pour résoudre cet exercice.

Partie C : Étude asymptotique

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. Pour tout entier naturel n, $J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n$.
   Or, d'après la question **B1**, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
   Ainsi, $J_{n+1} - J_n = (n+2)\dfrac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n = 0$.
   Or, $J_0 = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. La suite (J_n) est donc constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
2. D'une part, la suite (W_n) est décroissante et positive. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.
   Par ailleurs, toujours par décroissance de la suite (W_n), pour tout entier naturel n, $W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$ et donc, en utilisant la question **B1**, $W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ d'où $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2nW_n}$.
   Or, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.
   Ainsi, en remplaçant W_{n-1} dans cette inégalité, on a $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{2}{\pi}nW_n^2 \leqslant 1$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi}nW_n^2$ existe et vaut 1.