Chapitre I : Second degré

1 Fonction polynôme du second degré

1.1 Cas général

Définition 1.1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction polynôme du second degré s'il existe trois nombres réels, a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme s'appelle la forme développée de f. Les réels a, b et c sont les coefficients du polynôme $ax^2 + bx + c$.

R Dans toute la suite du chapitre, a, b et c désignent des réels tels que $a \neq 0$

■ **Exemple 1.1** La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^2 - 4x + \sqrt{5}$ est une fonction polynôme du second degré. ■

R On parle également de fonction trinôme du second degré.

1.2 Forme canonique

Propriété 1.1 Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré. Alors il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Définition 1.2 Cette forme s'appelle la forme canonique du polynôme $ax^2 + bx + c$

Démonstration 1.1 Soit $x \in \mathbb{R}$.
Puisque $a \neq 0$, on peut factoriser $f(x)$ par a. Ainsi, on a

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

On va faire apparaître une identité remarquable "dans la parenthèse".

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\times\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Or, on a, pour tout réel x :

$$x^2 + 2\times\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Ainsi,

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

Ce qui donne, en distribuant a :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\times\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}\right)$$

Ou encore :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

On obtient ainsi la forme recherchée. □

■ **Exemple 1.2** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=2x^2-12x-8$. Soit donc $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(x^2-6x-4)\\ &= 2(x^2-2\times3\times x+3^2-3^2-8)\\ &= 2((x-3)^2-17)\\ &= 2(x-3)^2-34\end{aligned}$$

La forme canonique de $f(x)$ est donc $2(x-3)^2-34$. ■

1.3 Variations d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 1.2 Soit f une fonction polynôme du second degré, définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$. f admet le tableau de variation suivant, selon le signe de a

Si $a>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

f admet un minimum en $x=\alpha$
Ce minimum vaut β

Si $a<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

f admet un maximum en $x=\alpha$
Ce maximum vaut β

■ **Exemple 1.3** On souhaite étudier les variations de la fonction $f:x\mapsto 3x^2+18x+33$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

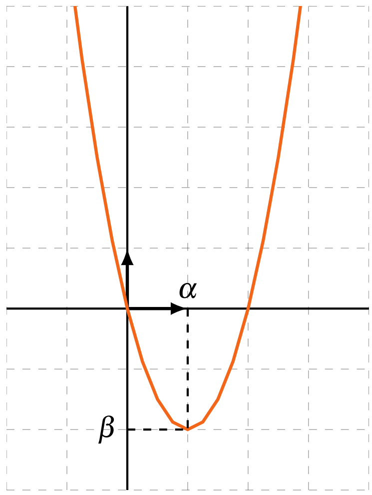
$$\begin{aligned}f(x) &= 3x^2+18x+33\\ &= 3(x^2+6x+11)\\ &= 3(x^2+6x\,\mathbf{+\,9\,-\,9}\,+11)\\ &= 3[(x+3)^2+2]\\ &= 3(x+3)^2+6\\ &= 3(x-(-3))^2+6\end{aligned}$$

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f		$\searrow$	6	$\nearrow$	

f admet un minimum en $x = -3$. Ce maximum vaut 6. ■

■ **Exemple 1.4** On considère la fonction f, polynomiale du second degré, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée ci-contre.



- Le sommet de la parabole se trouve en (1;-2). La forme canonique de $f(x)$ est donc de la forme

$$f(x) = a(x-1)^2 + (-2)$$

- Regardons en $x = 0$.
  - D'après le graphique, $f(0) = 0$
  - D'après la formule, $f(0) = a \times (0-1)^2 - 2 = a - 2$
  - On en déduit que $a = 2$
- Finalement, pour tout réel x,

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 2$$

■

2 Résolution d'équation du second degré

2.1 Discriminant

Définition 2.1 Soit f une fonction polynomiale, définie sur $\mathbb{R}$. On dit que x_0 est une racine de f si $f(x_0) = 0$

R L'utilisation du terme "racine" est ici un abus de langage. On ne parle pas vraiment de la racine d'une fonction polynomiale mais plutôt de la racine d'un polynôme.

■ **Exemple 2.1** Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 0$. 1 est donc une racine du polynôme $3x^2 - 5x + 2$. ■

Définition 2.2 Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré. On appelle discriminant de ce polynôme le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

■ **Exemple 2.2** Le discriminant du polynôme $3x^2 - 4x - 5$ vaut $(-4)^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 76$ ■

Théorème 2.1 Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et Δ son discriminant. Alors :
- Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme possède une racine dite double, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$, le polynôme possède deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Démonstration 2.2 On rappelle que le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'écrit sous forme canonique

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Ce que l'on réécrit, en factorisant par a et en remplaçant b^2-4ac par Δ :

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- Si $\Delta<0$, alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. On a donc, dans la parenthèse, la somme de deux termes positifs, dont un l'est strictement. Ainsi, pour tout réel x

  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$$

  et donc, $a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$ est du signe de a. Celui-ci étant non nul, le polynôme ax^2+bx+c ne s'annule donc jamais, peu importe la valeur de x.
- Si $\Delta=0$, alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$, qui vaut 0 si et seulement si $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, on peut calculer la racine carrée de Δ. On a donc

  $$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

  On reconnait une identité remarquable du type x^2-y^2 que l'on s'empresse de factoriser.

  $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

  Que l'on simplifie

  $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

  Ce polynôme s'annule donc en deux valeurs distinctes :

  $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad \text{et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

□

■ **Exemple 2.3** On souhaite résoudre l'équation $2x^2-6x-8=0$.
Avant tout, on vérifie que l'on n'a pas affaire à une factorisation évidente ou une identité remarquable !
On calcule alors le discriminant Δ.

$$\Delta=(-6)^2-4\times2\times(-8)=36+64=100>0$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times2}=\frac{6-10}{4}=-1$$

et

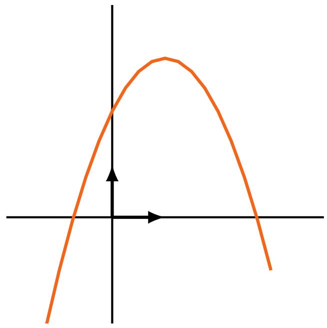
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times2}=\frac{6+10}{4}=4$$

■

2.2 Interprétation graphique

Propriété 2.1 Soit $f : ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale du second degré et Δ son discriminant. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
- Si $\Delta < 0$, alors $\mathscr{C}_f$ n'a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, qui est le sommet de la parabole.
- Si $\Delta > 0$, alors $\mathscr{C}_f$ possède deux points d'intersection avec l'axe des abscisses. : ce sont les points de coordonnées $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$, x_1 et x_2 étant les racines calculées précédemment.

Exemple 2.4 On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, dont la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ est donnée ci-contre.
- La fonction est croissante puis décroissante, ce qui signifie que le coefficient a est strictement positif.
- La courbe a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses. Le discriminant du polynome est donc strictement positif.



3 Résolution d'inéquation du second degré

3.1 Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété 3.1 Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement les mêmes). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Définition 3.1 Cette écriture est la forme factorisée du polynôme $ax^2 + bx + c$

Exemple 3.1 Soit $f : x \mapsto -4x^2 + 12x - 8$, définie sur $\mathbb{R}$.
Calculons le discriminant du polynôme $-4x^2 + 12x - 8$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-8) = 144 - 128 = 16 > 0$$

Le polynôme possède donc deux racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - \sqrt{16}}{2 \times (-4)} = \frac{-12 - 4}{-8} = 2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + \sqrt{16}}{2 \times (-4)} = \frac{-12 + 4}{-8} = 1$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$-4x^2 + 12x - 8 = -4(x - 1)(x - 2)$$

3.2 Signe d'une fonction polynomiale du second degré

Propriété 3.2 Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$. Soit $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$, définie sur $\mathbb{R}$. Le tableau de signe de f est donc le suivant

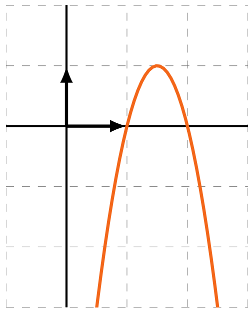
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

■ **Exemple 3.2** On a vu dans le dernier exemple que, pour tout réel x, on avait

$$-4x^2+12x-8 = -4(x-1)(x-2)$$

On en déduit le tableau de signes de $-4x^2+12x-8$, le coefficient -4 étant strictement négatif

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



■

3.3 Relations coefficients-racines

Propriété 3.3 Soit ax^2+bx+c un polynôme du second degré. On admet que ce polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2. Alors :

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et } x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration 3.1 On rappelle l'expression des racines x_1 et x_2 du polynôme ax^2+bx+c en fonction de ses coefficients.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a ainsi

$$x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

De plus,

$$x_1x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

□

■ **Exemple 3.3** On considère le polynôme $6x^2+7x-13$.
On voit que 1 est une racine de ce polynôme : $6\times 1^2+7\times 1-13=0$
L'autre racine, x_2 est telle que $1\times x_2 = \frac{-13}{6}$, d'où $x_2 = -\frac{13}{6}$ ■