Chapitre II : Trigonométrie

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

1 Cercle trigonométrique

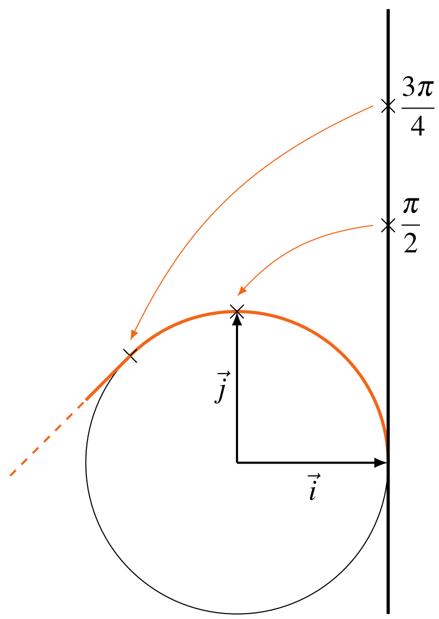
1.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 1.1 On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

R On parle également de sens direct ou sens anti-horaire. Le sens des aiguilles d'une montre et également appelé le sens horaire ou sens indirect.

R Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π.

Définition 1.2 On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.



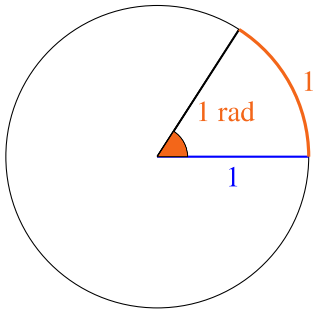
Propriété 1.1 Deux réels dont la différence est le produit de 2π et d'un nombre entier ont la même image par M

■ **Exemple 1.1** $M(\pi) = M(3\pi) = M(-\pi)$ ■

R Cela revient à faire une ou plusieurs fois le tour du cercle entre deux réels.

1.2 Radian

Définition 1.3 Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
Le radian (notation : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle $\mathscr{C}$ un arc de longueur 1.



Propriété 1.2 Les mesures a en degré et α en radians d'un même angle sont proportionnelles :

$$\alpha = a \times \frac{\pi}{180}$$

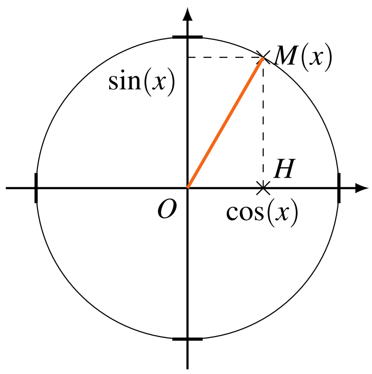
Exemple 1.2 On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

■

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2.1 Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :
- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$

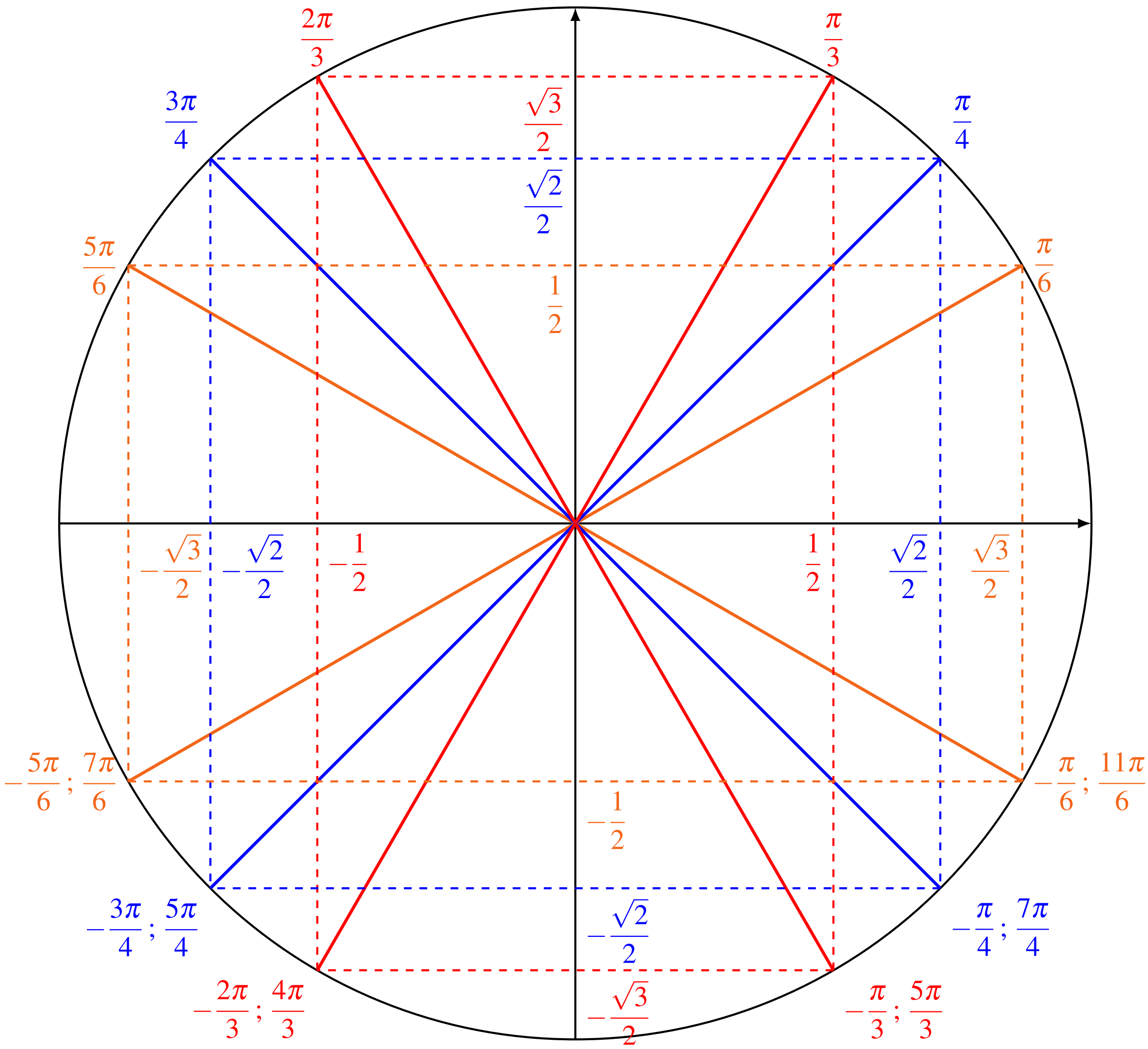


R Le rapprochement est évidemment à faire avec la trigonométrie dans le triangle rectangle, le segment [OM] est de longueur 1.
Sur la figure ci-dessus, on a ainsi $\cos(\widehat{HOM}) = \dfrac{OH}{OM} = OH$

■ **Exemple 2.1** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

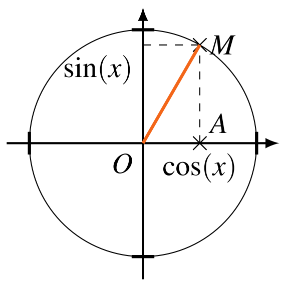
Ces valeurs remarquables seront démontrées en exercice. ■



Propriété 2.1 Pour tout réel x,

- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

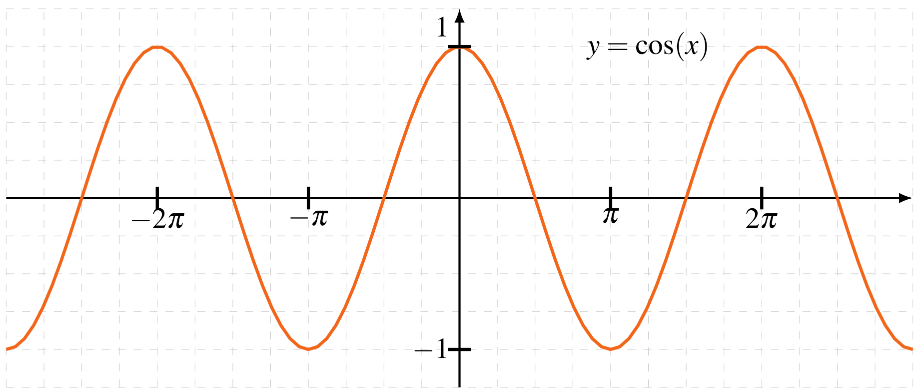
Démonstration 2.1 Soit x un réel et M son image par sur le cercle trigonométrique après enroulement de la droite des réels.
Appelons A le point de coordonnées $(\cos(x), 0)$. Le triangle OAM est rectangle en A, on a donc, d'après le théorème de Pythagore : $OA^2 + AM^2 = AM^2$



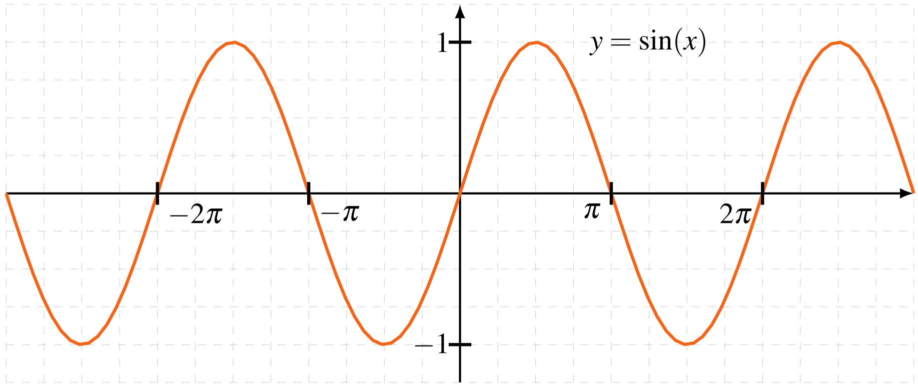
Or, $OA^2 = \cos(x)^2$, $AM^2 = \sin(x)^2$, et $OM^2 = 1$ car M est sur le cercle de centre O de rayon 1. On a donc $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ □

3 Fonctions trigonométriques

Définition 3.1 La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\sin(x)$	0		$-$		0		$+$		0

Propriété 3.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$; la fonction sinus est impaire.

■ **Exemple 3.1** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ■

Propriété 3.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

■ **Exemple 3.2** $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ■

Propriété 3.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$