Ensembles de Nombres

1 Ensemble d'entiers

Définition 1.1 L'ensemble des entiers positifs, aussi appelés entiers naturels, est noté $\mathbb{N}$.

Exemple 1.1 0 ; 1 ; 2 ; 3... sont des entiers naturels. On notera cela $0 \in \mathbb{N}$. Le symbole $\in$ signifie *appartient à* ■

Définition 1.2 L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$

R La notation $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand *zahlen* qui signifie *compter*.

1.1 Multiples et diviseurs

Définition 1.3 Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a est un diviseur de b s'il existe un entier relatif k tel que $b = a \times k$. On dit également que b est un multiple de a.

Exemple 1.2 Prenons $a = 7$ et $b = -56$. On sait que $-56 = 7 \times (-8)$. On a donc trouvé un entier relatif k tel que $b = a \times k$. -56 est donc un multiple de 7 ■

Définition 1.4 Soit $a \in \mathbb{Z}$. On dit que a est :
- **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$
- **impair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k+1$

Exemple 1.3 $23 = 2 \times 11 + 1$, 23 est donc un nombre impair ■

Propriété 1.1 La somme de deux nombres pairs est paire

Démonstration 1.1 Soit a et b deux nombres pairs
- Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$
- Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2k'$

Ainsi, $a+b = 2k+2k' = 2(k+k')$. $a+b$ est donc un nombre pair. □

R Plus généralement, on peut démontrer que la somme de deux multiples d'un entier relatif a est également un multiple de a.

Exemple 1.4 35 et 49 sont des multiples de 7. Leur somme est donc aussi un multiple de 7. En l'occurrence, $35+49 = 84 = 7 \times 12$. ■

Propriété 1.2 Un nombre est pair si et seulement si son carré est pair

R L'expression si et seulement si signifie que la proposition se lit dans les deux sens. "Si un nombre est pair, alors son carré est pair" (sens direct) mais aussi "Si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre est pair"

Démonstration 1.2 Soit $a \in \mathbb{Z}$

- Si a est pair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. Alors $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$. a^2 est donc pair.
- Pour le deuxième point, nous allons plutôt montrer que si a est impair, alors a^2 l'est aussi. Ainsi, si a^2 est pair, a ne peut être impair - sinon, a^2 aurait été impair. a est donc pair. Ce type de démonstration s'appelle *démonstration par contraposée*.
  Si a est impair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k+1$.
  $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$. a^2 est donc impair.

□

1.2 Nombres premiers

Définition 1.5 Soit $a \in \mathbb{N}$. a est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts , qui sont alors 1 et a.

■ **Exemple 1.5** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23 sont premiers.
$387 = 3 \times 129$. 3 et 129 sont diviseurs de 387. 387 n'est pas premier ■

R Cette définition permet d'exclure 1 des nombres premiers, ce qui est très pratique pour le théorème suivant.

Théorème 1.3 Tout entier naturel se décompose en produits de facteurs premiers, de manière unique à l'ordre des facteurs près

■ **Exemple 1.6** $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$ ■

R Cette décomposition est très utile pour obtenir des fractions irréductibles. N'oubliez pas qu'à chaque fois que vous ne simplifiez pas une fraction, un chaton meurt quelque part dans d'atroces souffrances. Pensez aux chatons, simplifiez vos fractions

■ **Exemple 1.7** $\frac{144}{210} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{2 \times \times 2 \times 2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$ ■

2 Ensemble des réels

2.1 Nombres rationnels

Définition 2.1 On dit qu'un nombre q est rationnel s'il existe deux nombres $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, avec $b \neq 0$ tels que $q = \frac{a}{b}$. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

R Les nombres entiers relatifs sont rationnels. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, on a évidemment $a = \frac{a}{1}$.

Définition 2.2 On dit qu'un nombre d est décimal s'il existe deux nombres $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, avec $b \geq 0$ tels que $d = \frac{a}{10^b}$. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{D}$.

■ **Exemple 2.1** 12.347 est décimal. En effet, $12.347 = \frac{12347}{1000} = \frac{12347}{10^3}$ ■

R Les nombres décimaux sont les nombres rationnels qui ont "un nombre fini de chiffre après la virgule".

Propriété 2.1 $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration 2.1 Supposons que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$. Ainsi, $10^b = 3a$, ce qui implique que 10^b est un multiple de 3. Ce n'est pas le cas : $\frac{1}{3}$ ne peut donc pas être un nombre décimal. □

R Pour cette démonstration, nous avons fait une supposition et avons abouti à une contradiction : c'est le principe du *raisonnement par l'absurde*.

R Il est faux de dire que $\frac{1}{3} = 0.33$ ou que $\frac{1}{3} = 0.333333333$. Ce ne sont que des valeurs approchées. Pour une valeur exacte, il faudrait inscrire une infinité de 3, ce qui prend plus de place et de temps que vous n'en aurez jamais. Dans ce cas, on laissera le résultat sous la forme d'une fraction - simplifiée, bien entendu.

2.2 Des nombres irrationnels

Définition 2.3 Soit $a \geqslant 0$. On appelle racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$, l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$. Autrement dit, $\sqrt{a}$ est le nombre qui, au carré, vaut a.

■ **Exemple 2.2** $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{144} = 12$ ■

Propriété 2.2 Soit $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Démonstration 2.2 D'une part, $\sqrt{ab}^2 = ab$, par définition de la racine carrée.
D'autre part, $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab$.
$\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positifs et solutions de l'équation $x^2 = ab$. Ces quantités sont donc égales. □

■ **Exemple 2.3** $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$. ■

R Il est en général faux de dire que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$!
Par exemple, $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

Théorème 2.3 $\sqrt{2}$ est irrationnel.

R Du temps d'un certain Pythagore, on pensait que tous les nombres étaient rationnels. La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ou du moins sa révélation, est attribuée à l'un de ses disciples, Hippase de Métaponte. Cet acte lui aurait valu, selon certaines légendes, d'être noyé par ses confrères pythagoriciens. Grosse ambiance...

Théorème 2.4 π est irrationnel.

R Même si le nombre π est connu depuis l'Antiquité, son irrationnalité n'a été montrée qu'en 1761 par Johann Heinrich Lambert. On suppose également que π est un nombre univers : tous les nombres entiers apparaissent dans ses décimales, comme votre date de naissance ou votre numéro de téléphone. Ce résultat n'est toujours pas démontré à ce jour.

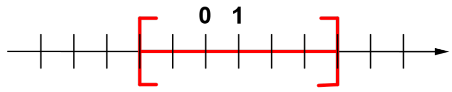
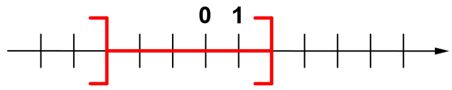
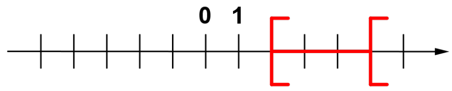
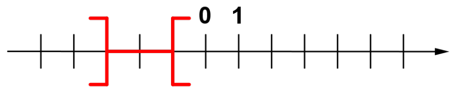
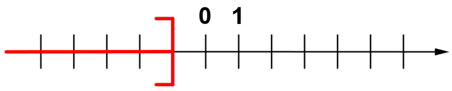
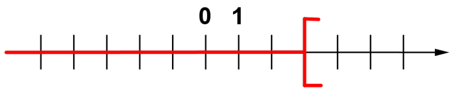
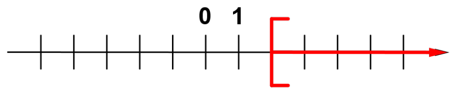
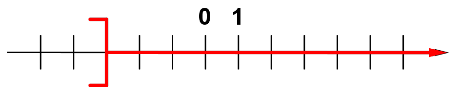
2.3 Ensemble des réels

Définition 2.4 L'ensemble des **réels** est l'ensemble des abscisses possibles d'une droite graduée. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

■ **Exemple 2.4** $\sqrt{2}$, π, 0, 3.72 appartiennent à $\mathbb{R}$. ■

2.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 2.5 Un *intervalle* est une partie continue de l'ensemble des réels qui désigne **tous les nombres réels** compris entre deux réels a et b. On peut lui faire correspondre une inégalité.

Réels x	Représentation graphique	Notation
$-2 \leq x \leq 4$		$[-2;4]$
$-3 < x \leq 2$		$]-3;2]$
$2 \leq x < 5$		$[2;5[$
$-3 < x < -1$		$]-3;-1[$
$x \leq -1$		$]-\infty;-1]$
$x < 3$		$]-\infty;3[$
$x \geq 2$		$[2;+\infty[$
$x > -3$		$]-3;+\infty[$

■ **Exemple 2.5** $2 \in [1;4.5[$, $\pi \in [3.1;3.2]$, $\sqrt{2} \notin [2;+\infty[$ ■

R L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty;+\infty[$

R Attention à ne pas confondre $\{1;2\}$, composé uniquement de deux éléments que sont les réels 1 et 2, et l'intervalle $[1;2]$, qui contient tous les réels entre 1 et 2... c'est-à-dire une infinité de nombre. Par exemple, $1.5 \in [1;2]$ mais $1.5 \notin \{1;2\}$.

2.5 Valeur absolue

Définition 2.6 Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x, notée x, la distance à zéro de x

R Si $x \geqslant 0$, on a alors $|x| = x$. Si $x < 0$, on a alors $|x| = -x$.

■ **Exemple 2.6** $|5| = 5$; $|-2| = 2$ ■

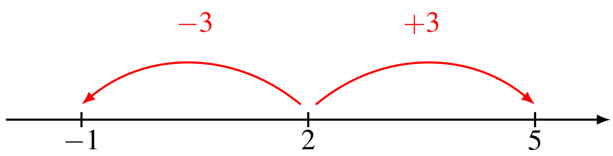
Propriété 2.3 Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$

■ **Exemple 2.7** $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ ■

Définition 2.7 Soit x et y deux réels. On appelle distance de x à y la quantité $|x-y|$

■ **Exemple 2.8** La distance de 3 à 5 vaut $|3-5| = |-2| = 2$ ■

■ **Exemple 2.9** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x-2| = 3$
Cela revient à trouver tous les réels x qui sont à une distance 3 du réel 2



Cela signifie que $x-2 = 3$ ou que $x-2 = -3$, c'est-à-dire $x = 5$ ou $x = -1$. $S = \{-1;5\}$ ■

■ **Exemple 2.10** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|x-2| \geqslant 3$
Cela signifie que la distance entre x et 2 est inférieur ou égale à 3, où encore que $-3 \leqslant x-2 \leqslant 3$.
$S = [-1;5]$ ■

3 Relations sur les ensembles

3.1 Inclusion

Définition 3.1 Soit A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B, noté $A \subset B$ si tout élément de A est également dans B

■ **Exemple 3.1** $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ■

■ **Exemple 3.2** $[1;2] \subset [-3;7.5]$. $[2;4[\not\subset [1:3]$. En effet, $3.5 \in [2;4[$ mais $3.5 \notin [1;3]$. ■

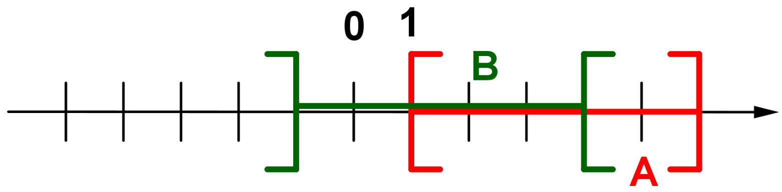
3.2 Union et intersection

Définition 3.2 Soit A et B deux ensembles :

- L'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et B s'appelle **l'intersection** de A et B. On le note $A \cap B$ (se lit A inter B).
- L'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B s'appelle **la réunion** de A et B. On le note $A \cup B$ (se lit A union B)

■ **Exemple 3.3** Soit $A = [1;5]$ et $B =]-1;3[$. Que vaut $A \cap B$ et $A \cup B$?

On peut représenter les deux intervalles A et B sur un même axe gradué



L'intersection est l'ensemble des nombres appartenant aux deux intervalles (les deux couleurs à la fois). La réunion est l'ensemble des nombres appartenant à au moins un intervalle.

- $A \cap B = [1;4[$
- $A \cup B =]-1;5]$

■

R Il se peut que l'intersection de deux intervalles ne contienne aucun élément : on notera $\varnothing$, qui se lit "ensemble vide".