Exercices II : Notion de fonction

■ **Exercice 1** (*) On définit une fonction f à l'aide du tableau de valeurs suivants

x	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	0	6
$f(x)$	8	-3	8	π	2,5

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Quelle est l'image par f de 0 ? de 6 ?
3. Quels sont les antécédents de 8 par f ?
4. Quels sont les réels qui ont pour image un élément de $\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Q}$?

■ **Exercice 2** (*) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 25$.

1. Quelle est l'image de 3 par f ? L'image de -3 ? L'image de 8 ?
2. Calculer f(7), f(-1).
3. Quels sont les antécédents de 0 par f ?

■ **Exercice 3** (*) On considère les trois fonctions suivantes définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x - 2$
$g(x) = x^2$
$h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Compléter le tableau de valeurs ci-contre.

x	1	$\frac{1}{2}$	-3	$\sqrt{2}$
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

■ **Exercice 4** (**) On définit une fonction f comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+3 & \text{, si } x \in [-1;0] \\ -3x+4 & \text{, si } x \in]0;1] \end{cases}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(0)$.

■ **Exercice 5** (*) On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 6$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{8}{6}\right)$
2. Déterminer les antécédents de 0 par f;
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

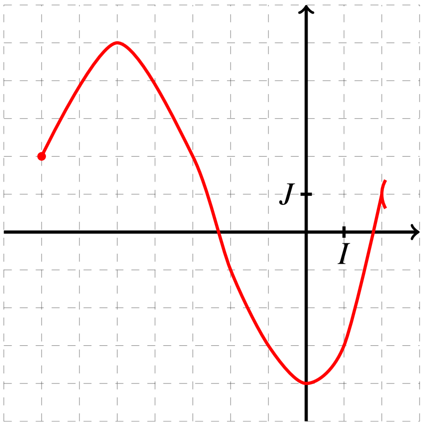
■ **Exercice 6** (*) On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 10$ et $g(x) = 10x + 5$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{11}{4}\right)$, $g\left(\dfrac{3}{5}\right)$
2. Déterminer les antécédents de 0 par f et g;
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

R Dans la suite des exercices, on se placera dans un repère (O, I, J) orthonormé.

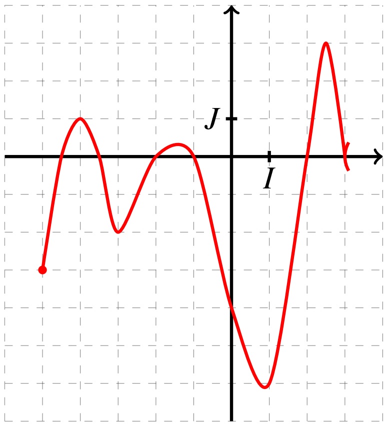
■ **Exercice 7** (*) Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quelle est l'image par f de -4 ? de -6 ?
3. Que vaut $f(-5)$?
4. Quels sont les antécédents par f de -4 ? -3 ?
5. Combien y a-t-il d'antécédents par f du réel -1 ? du réel 1 ?



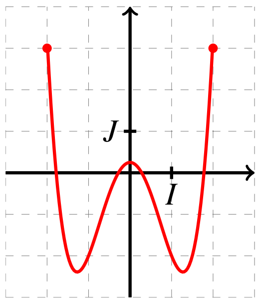
■ **Exercice 8** (*) Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quelle est l'image par f de -2 ? de 1 ?
3. Que vaut $f(-3)$?
4. Combien y a-t-il d'antécédents par f du réel -2 ? du réel -3 ?
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \leqslant 0$



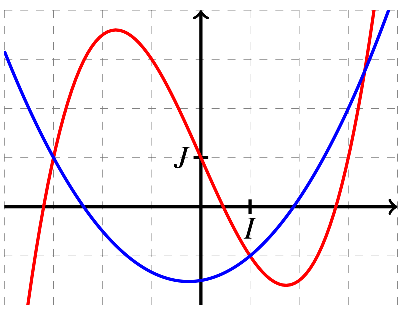
■ **Exercice 9** (*) Soit g la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1. Déterminer le domaine de définition D de g.
2. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 3$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leqslant -2$ sur D.
4. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = -7$ sur D.

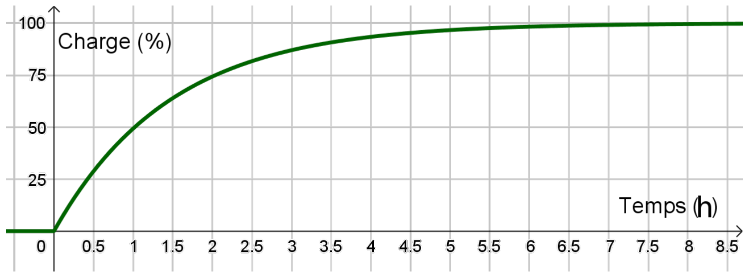


■ **Exercice 10** (**) Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{9x}{4} + 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x}{6} - \dfrac{3}{2}$.

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Associer chaque courbe à la fonction correspondante.
3. Combien de solutions l'équation $f(x) = g(x)$ possède-t-elle sur l'intervalle $[-4,4]$?
4. On admettra que $f\left(\dfrac{10}{3}\right) = g\left(\dfrac{10}{3}\right)$. Comment interpréter graphiquement cette égalité ?
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[-4,4]$.



■ **Exercice 11** (*) Le condensateur est un appareil électronique capable d'accumuler et stocker de l'énergie électrique. Pour cela, il suffit de le brancher sur un générateur continu et le condensateur se chargera alors. Le graphique ci-dessous indique la charge d'un condensateur en fonction du temps.



1. Quelle est la charge du condensateur au bout d'une heure de charge ?
2. Combien de temps faut-il attendre pour que le condensateur soit chargé à 75% ?

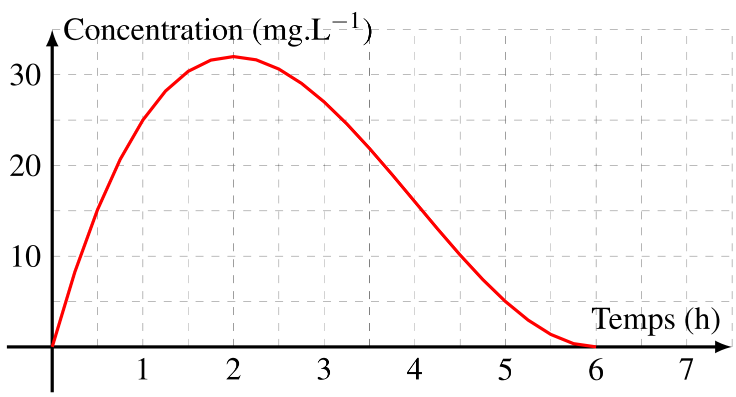
On propose de modéliser la charge du condensateur à l'aide d'une fonction g définie pour $x \in]0;+\infty[$ par $g(x) = 100 - \dfrac{50}{x}$.

3. Calculer $g(1)$, $g(2)$ et $g(0{,}5)$.
4. Le graphique présenté peut-il être celui de la fonction g ? Justifier.

■ **Exercice 12** (**) Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicamenteuse au temps $t = 0$, t étant exprimé en heures. Pour tout réel de $[0:6]$, la concentration du principe actif en mg.L^{-1}, t heures après l'injection est donnée par la fonction c définie par

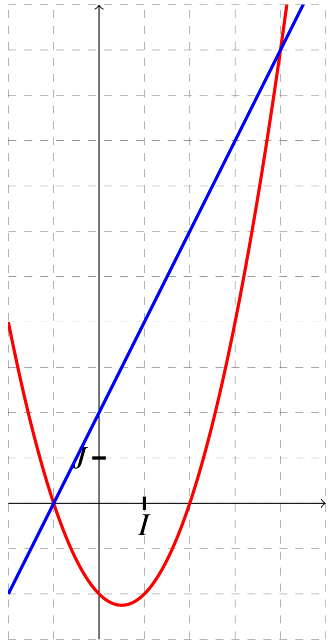
$$c(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

Le médicament est efficace lorsque la concentration du principe actif est supérieure ou égale à 25 mg.L^{-1}. La courbe représentative de la fonction c est donnée ci-dessous.



1. Quelle est la concentration du principe actif après 30 minutes ? On utilisera le graphique ET le calcul
2. A partir de quel temps n'y a-t-il plus de principe actif ? Vérifier le résultat par le calcul.
3. Durant quelle période le médicament est-il efficace ?

■ **Exercice 13** (*) On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 - x - 2$ et $g : x \mapsto 2x + 2$. Les courbes de ces deux fonctions sont représentées ci-contre.

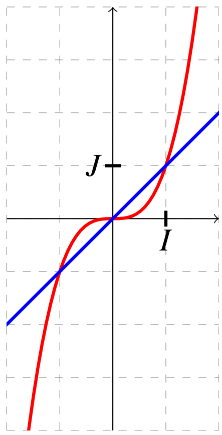


1. Associer à chaque courbe la fonction correspondante.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < g(x)$

(***) Nous allons résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

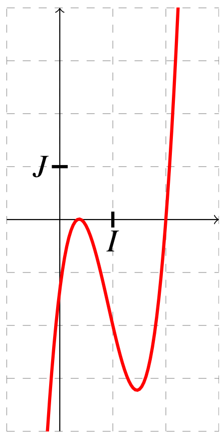
1. Que vaut $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$?
2. Montrer, en développant l'expression, que
$$f(x) - g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$
3. En déduire les solutions de l'équation
$$f(x) = g(x)$$

■ **Exercice 14** (**) On considère les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbb{R}$. Les courbes de ces deux fonctions sont représentées ci-contre.



1. Associer à chaque courbe la fonction correspondante.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$
4. Retrouver le résultat de la question 2 par le calcul

■ **Exercice 15** (*) On considère la fonction
$$f : x \mapsto 5x^3 - \frac{41}{3}x^2 + 8x - \frac{4}{3}$$
définie sur $\mathbb{R}$. La courbe de cette fonction est représentée ci-contre.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Combien semble-t-on avoir de solutions ?
2. Montrer que $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $f\left(\dfrac{2}{5}\right)$ et $f(2)$ valent 0.
3. Quelles sont les inconvénients d'une résolution graphique d'équation ?