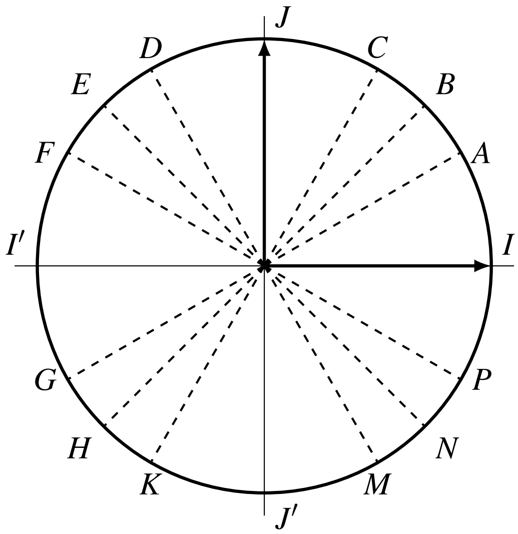
Exercices II : Trigonométrie

Dans tous les exercices, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

▪ **Exercice 1** (*) On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants

π	2π	-3π	18π
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{17\pi}{2}$	$\dfrac{-7\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{-5\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$
$\dfrac{-7\pi}{4}$	$\dfrac{19\pi}{3}$	$\dfrac{-37\pi}{6}$	$\dfrac{23\pi}{4}$

▪ **Exercice 2** (*) Pour chacun des couples de réels suivants, déterminer s'ils ont le même point-image par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Justifier.

5π et -3π $\qquad$ $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{23\pi}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{3\pi}{2}$ et $\dfrac{9\pi}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{7\pi}{3}$ et $-\dfrac{17\pi}{3}$

▪ **Exercice 3** (**) Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique réel dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ ayant le même point-image par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique que les réels suivants.

18π $\qquad$ $\dfrac{23\pi}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{51\pi}{4}$ $\qquad$ $-\dfrac{47\pi}{6}$ $\qquad$ -33π $\qquad$ $\dfrac{25\pi}{3}$ $\qquad$ $-\dfrac{99\pi}{7}$ $\qquad$ 9

▪ **Exercice 4** (**) Même consigne que l'exercice précédent, en donnant l'unique réel dans l'intervalle $[0;2\pi[$

▪ **Exercice 5** (*) $\dfrac{\pi}{5}$ radians équivalent à 36 degrés. Déterminer, sans calculatrice, la mesure en radians d'un angle de 72 degrés et d'un angle de 324 degrés ?

▪ **Exercice 6** (*) On considère un angle α dont la mesure est de 15 degrés.

1. Déterminer, sans calculatrice, la mesure en radians de l'angle α.
2. Toujours sans calculatrice, car c'est le mal, quelle est la mesure en radians d'un angle de 165 degrés ? de 105 degrés ?

▪ **Exercice 7** (*) Soit M et N les points-images de $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Déterminer la longueur de l'arc de cercle $\widehat{MN}$, qui part du point M et va vers N dans le sens trigonométrique

■ **Exercice 8** (*) Même question avec les points A et B, les points-images de $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{9\pi}{4}$

■ **Exercice 9** (*) En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

■ **Exercice 10** (**) En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$	$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$	$\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)$
$\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{33\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right)$	$\sin\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

■ **Exercice 11** (*) Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(x) = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Que vaut $\sin(x)$?

■ **Exercice 12** (*) Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -0.6$. Que vaut $\cos(x)$?

■ **Exercice 13** (*) Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{4}{5}$. Que vaut $\cos(x)$?

■ **Exercice 14** (**) L'objectif de cet exercice est de calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Soit M le point-image de $\frac{\pi}{3}$ par enroulement de la droite des réels.

1. Quel est le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$? de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$?
2. Soit I le point de coordonnées $(1;0)$. Quelle est la nature du triangle OIM ?
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
4. En utilisant le fait que, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

■ **Exercice 15** (**) En reprenant la même démarche que dans l'exercice précédent, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. On considèrera cette fois le triangle OMJ, où J est le point de coordonnées $(0;1)$ et M est le point-image de $\frac{\pi}{6}$

■ **Exercice 16** (**) L'objectif de cet exercice est de calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Soit M le point-image de $\frac{\pi}{4}$ par enroulement de la droite des réels.

1. Quel est le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$? de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$?
2. Soit H le point de coordonnées $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right); 0\right)$. Déterminer la nature du triangle OHM et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

■ **Exercice 17** (**) Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

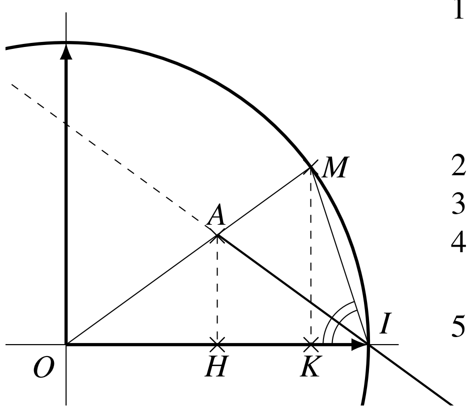
■ **Exercice 18** (*) On admet le résultat suivant : pour tous réels x et y

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$$

Soit x un réel. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

$\cos(x+\pi)$	$\sin(x+\pi)$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(2x)$	$\sin(2x)$

■ **Exercice 19** (***) L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On considère le point I de coordonnées $(1;0)$ et M, le point-image du réel $\frac{\pi}{5}$ par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. On note A le point d'intersection de $[OM]$ avec la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{OIM}$.



1. Déterminer la mesure en radians des angles $\widehat{OIM}$, $\widehat{OMI}$ puis des angles $\widehat{IAM}$ et $\widehat{OAI}$. On se rappellera pour cela de la valeur de la somme des mesures des angles dans un triangle.
2. Quelle est la nature des triangles IAM et OAI ?
3. Quelle est l'abscisse du point A ?
4. Montrer que les triangles OMI et IAM sont semblables.
5. Il en vient que $\frac{IM}{OI}=\frac{AM}{IM}$. Que vaut alors la longueur IM ?
6. On place les points H et K qui sont les projetés orthogonaux de A et M sur l'axe des abscisses. En utilisant le théorème de Thalès, retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

■ **Exercice 20** (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in]-\pi;\pi]$.

$\cos(x)=\frac{1}{2}$	$\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(x)=0$	$\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

■ **Exercice 21** (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in[0;2\pi[$.

$\sin(x)=\frac{1}{2}$	$\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(x)=0$	$\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

■ **Exercice 22** (**) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in]-\pi;\pi]$

$\sin(2x)=1$	$\cos(3x)=-\frac{1}{2}$	$\cos(3x+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(x^2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

■ **Exercice 23** (***) A l'aide d'un changement de variable bien choisi, résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in]-\pi;\pi]$

$$\cos^2(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{3}{2}=0 \qquad\qquad \sin^2(x)+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(x)+1=0$$

Exercice 24 (*) Sans les calculer, comparer les sinus et les cosinus des réels suivants

$\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$ $\qquad$ $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $\frac{6\pi}{7}$ et $\frac{7\pi}{8}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{8}$ et $-\frac{3\pi}{8}$

Exercice 25 (*) Déterminer si les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre

$f_1 : x \mapsto \sin^2(x)$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto 1-\cos(x)$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto 1+\sin(x)$

$f_4 : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto \sin^3(x)$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto x\cos(x)$

Exercice 26 (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Déterminer le minimum et le maximum de f sur son domaine de définition. Pour chacun d'eux, donner une valeur où il est atteint.

Exercice 27 (**)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide du cercle trigonométrique, exprimer $\cos(\pi+x)$ et $\sin(\pi+x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. En déduire que les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ sont π-périodiques

$f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ $\qquad$ $g : x \mapsto \sin^2(x)$

Exercice 28 (**) Soit $k \in]0;+\infty[$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$, définie sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\pi}{k}$-périodique.

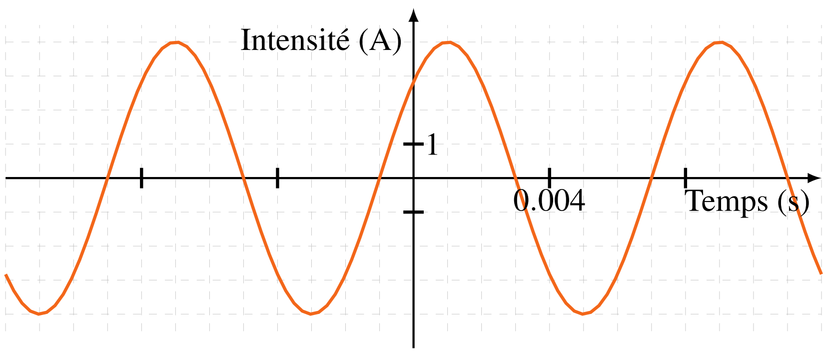
Exercice 29 (***) Soit m et n deux entier naturels non nuls.
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{x}{m}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{n}\right)$ est périodique. Préciser une période cette fonction.

Exercice 30 (**) En électricité, en courant alternatif, l'intensité i du courant électrique à un temps t, exprimé en secondes, peut être décrite à l'aide de fonctions trigonométriques.

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

où i_0 désigne l'amplitude du signal en ampères, ω est la pulsation du signal, en rad.s^{-1} et ϕ est le déphasage, exprimé en radians.

1. Montrer que l'intensité i est $\dfrac{2\pi}{\omega}$-périodiques.
2. Déterminer, sur l'exemple suivant, les valeurs de i_0, φ et ω.



3. La valeur $\cos(\varphi)$ est appelée facteur de puissance. Quel est le facteur du puissance de ce signal ?