Chapitre IV : Dérivation

1 Taux de variation

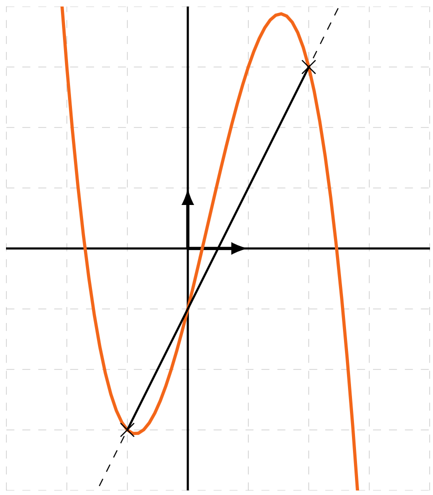
Définition 1.1 Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de l'intervalle I. On appelle taux de variation de f entre x_1 et x_2 la quantité :

$$T_f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

■ **Exemple 1.1** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. Le taux de variation de f entre 1 et 4 vaut

$$T_f(1;4) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4^2-2\times 4-(1^2-2\times 1)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

■



Ⓡ Ce taux de variation correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$

■ **Exemple 1.2** On considère une fonction f dont la courbe est représentée ci-contre dans un repère orthonormé.

- Le taux de variation de f entre -1 et 2 vaut 2.
- Le taux de variation de f entre -1 et 1 vaut 3.

■

2 Dérivabilité locale

2.1 Nombre dérivé

Définition 2.1 Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et $a \in I$.
On dit que la fonction f est dérivable en a si le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ tend vers un unique réel l lorsque h tend vers 0.
Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et est notée

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

■ **Exemple 2.1** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. On veut étudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Soit donc $h \in \mathbb{R}$

$$T_f(3;3+h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(0+h)^2-2(0+h)-0}{h} = \frac{h^2-2h}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = -2+h$$

Lorsque h tend vers 0, ce taux de variation tend vers -2. La fonction f est donc dérivable en $x = 0$. Le nombre dérivé de f en 0 est $f'(0) = -2$ ■

■ **Exemple 2.2** On rappelle que pour tout réel x, la valeur absolue de x, notée $|x|$ vaux x si $x > 0$ et $-x$ sinon. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x[$. Calculons le taux de variation de la fonction f en 0. Soit $h > 0$; alors

$$T_f(0;0+h) = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

En revanche, si $h < 0$

$$T_f(0;0+h) = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

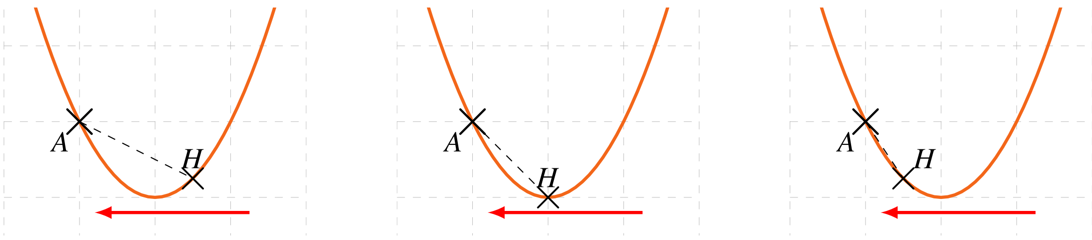
Le taux de variation ne se rapproche pas d'une seule et unique valeur : la fonction f n'est donc pas dérivable en 0. ■

2.2 Interprétation graphique

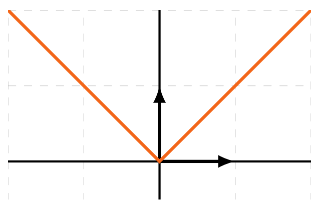
On fixe un point A d'abscisse a sur la courbe et on trace les droites qui passent par ce point et par un autre point H d'abscisse $a+h$ sur la courbe.

Si la fonction est dérivable en a, plus le point H est proche du point A (c'est-à-dire plus h est proche de 0), plus le coefficient directeur de la droite $[AH]$ se rapproche d'une valeur qui est le nombre dérivé de la fonction en ce point.

■ **Exemple 2.3** Dans l'exemple ci-dessous, on a tracé la courbe d'une fonction f dans un repère orthonormé. Le coefficient directeur de la droite $[AH]$ se rapproche de -2. Le nombre dérivé de f en a vaut donc -2 ■



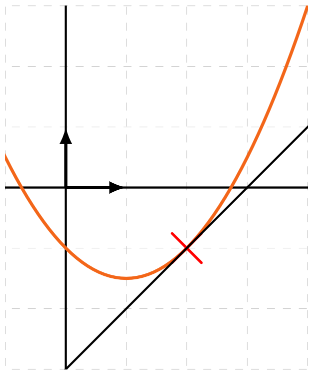
La fonction valeur absolue, elle, n'est pas dérivable en 0. On peut le voir graphiquement : la courbe est "pointue" en 0.



3 Tangente à une courbe

Définition 3.1 Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie sur I et dérivable en a.
La tangente à la courbe représentative de f à l'abscisse a est la droite passant par le point de coordonnées $(a;f(a))$ dont le coefficient directeur vaut $f'(a)$.

■ **Exemple 3.1** :



On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe représentative de f est représentée ci-contre dans un repère orthonormé. On souhaite tracer la tangente T à cette courbe à l'abscisse $x = 2$.
Puisque $f(2) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - 1 = -1$, la tangente passe par le point de coordonnées (2;-1). Soit $h \in \mathbb{R}$

$$T_f(2;2+h) = \frac{\frac{1}{2}(2+h)^2 - (2+h) - 1 - (-1)}{h} = \frac{2 + 2h + \frac{1}{2}h^2 - 2 - h}{h} = \frac{h + \frac{1}{2}h^2}{h} = 1 + \frac{1}{2}h$$

Ce taux de variation tend vers 1 lorsque h tend vers 0. La tangente T a donc pour coefficient directeur $f'(2) = 1$. ■

Propriété 3.1 Soit I un intervalle, $a \in I$ et f une fonction définie sur I et dérivable en a. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration 3.1 Toute droite non verticale admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
- On sait que le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$. L'équation est donc de la forme $y = f'(a)x + p$
- La droite passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$. On a donc $f(a) = f'(a) \times a + p$, c'est-à-dire $p = f(a) - f'(a) \times a$
- La tangente a donc pour équation $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

□

R Lorsque f est dérivable en a, si x est proche de a, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est proche de $f'(a)$. En isolant $f(x)$, on obtient que $f(x)$ est proche de $f'(a)(x-a) + f(a)$: la courbe de f est proche de la tangente au voisinage de a.

■ **Exemple 3.2** Dans l'exemple précédent, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$ a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 1 \times (x-2) + (-1) = x - 3$ ■