Exercices IV : Dérivation locale

■ **Exercice 1** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$ définie sur $\mathbb{R}$

1. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 2 et 5.
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre -4 et 1.

■ **Exercice 2** (*) On considère une fonction f définie sur $[-3;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Cette fonction semble-t-elle paire, impaire, ni l'un ni l'autre ?
2. Déterminer graphiquement le taux de variation de f entre -2 et 2.
3. Déterminer graphiquement le taux de variation de f entre -3 et 1.
4. Déterminer graphiquement le taux de variation de f entre -1 et 2.

■ **Exercice 3** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Calculer le taux de variation de la fonction f entre 1 et 3.
3. Calculer le taux de variation de la fonction f entre -5 et -2.

■ **Exercice 4** (***) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que si f est affine, alors pour tous réels distincts x_1 et x_2, le taux de variation de f entre x_1 et x_2 est égal au coefficient directeur de la fonction f.
2. Réciproquement, montrer que s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous réels distincts x_1 et x_2 , $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m$, alors f est affine, de coefficient directeur m.

■ **Exercice 5** (*) Soit h un réel. Simplifier les expressions suivantes

$A(x) = (3 + h^2) - 9$ $\qquad$ $B(x) = \dfrac{1}{2(4+h)} - \dfrac{1}{8}$ pour $h \neq -4$

$C(x) = \dfrac{(h-4)^2 + 3(h-4) - 4}{h}$ pour $h \neq 0$ $\qquad$ $D(x) = (2+h)^2 - 5(2+h) + 6$

■ **Exercice 6** (*) On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre 0 et $0+h$.
2. En déduire que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
3. Montrer que f est dérivable en 4 et calculer $f'(4)$.

■ **Exercice 7** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2+h$.
2. En déduire que f est dérivable en 2. Que vaut $f'(2)$?

■ **Exercice 8** Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f, définie sur I, est dérivable en a et calculer $f'(a)$

(*) $f : x \mapsto 7.4x - 22.8$, avec $I = \mathbb{R}$ et $a = \pi$ — $f : x \mapsto 3x^2 + 2x$, avec $I = \mathbb{R}$ et $a = -2$

(**) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$, avec $I =]3 : +\infty[$ et $a = 4$ — $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, avec $I =]-\infty; 0[$ et $a = -2$

■ **Exercice 9** (**) Un véhicule roule en ligne droite. La distance, exprimée en mètres, parcourue par ce véhicule en fonction du temps t, exprimé en secondes, vaut $d(t) = 2t^2 + t$.

1. Que vaut $d(5)$? Que représente cette valeur ?
2. Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Calculer la vitesse moyenne du véhicule entre les temps 5 et $5 + h$
3. En déduire la vitesse instantanée du véhicule au temps $t = 5$
4. Calculer la vitesse instantanée du même véhicule au temps $t = 7$

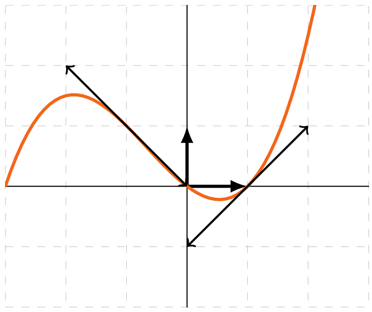
■ **Exercice 10** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit a et b deux réels. Montrer que $f(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
2. En déduire que f est dérivable en 1. Que vaut $f'(1)$?

■ **Exercice 11** (**) La fonction $f : x \mapsto |2x - 6|$, définie sur $\mathbb{R}$, est-elle dérivable en 3 ?

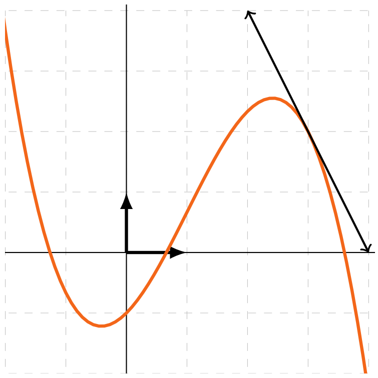
■ **Exercice 12** (*) On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre. Les tangentes à la courbe en $x = -1$ et $x = 1$ sont également tracées.

1. Cette fonction semble-t-elle paire, impaire, ni l'un ni l'autre ?
2. Déterminer graphiquement $f'(-1)$ et $f'(1)$



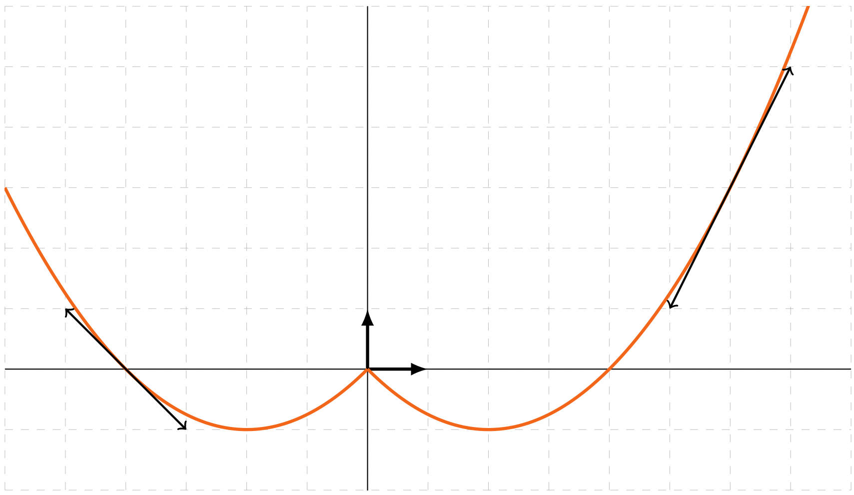
■ **Exercice 13** (*) On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre. La tangente à la courbe en $x = 3$ est également tracée.

1. Déterminer graphiquement le taux de variation de f entre 0 et 3.
2. Déterminer graphiquement $f'(3)$



■ **Exercice 14** (**) On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 2. La tangente à la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(1; -3)$. On sait de plus que $f(2) = 11$. Déterminer la valeur de $f'(2)$

■ **Exercice 15** (*) On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. Les tangentes à la courbe en $x = -4$ et en $x = 6$ sont également tracées.



1. Déterminer graphiquement le taux de variation de f entre -2 et 6.
2. Déterminer graphiquement $f'(-4)$ et $f'(6)$.
3. La fonction f semble-t-elle dérivable en 0 ? Pourquoi ?

■ **Exercice 16** (*) On considère une fonction f définie sur $[-3;3]$. Tracer, dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé, une courbe représentative possible pour la fonction f en sachant les informations suivantes :

- $f(-3) = 4 \quad f(-1) = 2 \quad f(0) = -3 \quad f(1) = -3 \quad f(3) = 1$
- f est dérivable en 1 et en -1. On a de plus $f'(1) = 0$ et $f'(1) = -1$.
- f n'est pas dérivable en 0.

■ **Exercice 17** (**) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en -3. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = -3$ passe par les points de coordonnées (2;-4) et (-5;9). Calculer $f(-3)$ et $f'(-3)$.

■ **Exercice 18** (*) On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, dérivable en 2. On sait que $f(2) = 3$ et $f'(2) = 5$. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

■ **Exercice 19** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^2 + 5x - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit h un réel non nul. Montrer que le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$ vaut $17 + 2h$
2. En déduire que f est dérivable en 3 et que $f'(3) = 17$.
3. En déduire l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

■ **Exercice 20** (***) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Montrer que f est dérivable en 2 puis déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.