Chapitre IV : Dérivation

1 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 1.1 Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors fonction dérivée de f sur I la fonction

$$f' ; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

■ **Exemple 1.1** Soit $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous allons montrer que f est dérivable en x, et donc que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit donc $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité se rapproche de $2x$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$ ■

2 Dérivées usuelles

$f(x) =$	Définie sur	Dérivable sur	$f'(x) =$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

R Ce tableau est bien entendu à connaître par coeur, ainsi que les démonstrations qui vont avec ! Remarquez par ailleurs que dans les lignes 5 et 6, les domaines de définition et de dérivation ne sont pas notés $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: ces deux ensembles ne sont pas des intervalles !

Démonstration 2.1 On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit $x \in \mathbb{R}*$ et $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)} \right) = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{x^2+hx} = -\frac{1}{x^2+hx}$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers $-\dfrac{1}{x^2}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$. □

Démonstration 2.2 On considère la fonction f définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $x \in]0;+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Lorsque h tend vers 0, cette quantité tend vers $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

R La fonction Racine carrée est définie en 0 mais n'est pas dérivable en 0 !

3 Opérations sur les dérivées

Dans toute la partie suivante, I désigne un intervalle.

3.1 Produit par un réel

Propriété 3.1 Soit u une fonction définie et dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction λu : $x \mapsto \lambda u(x)$ est définie sur I, de dérivée $\lambda u' : x \mapsto \lambda u'(x)$

Démonstration 3.1 Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\frac{\lambda u(x+h)-\lambda u(x)}{h} = \lambda \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

Or, f est dérivable sur I, donc $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi, $\lambda \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $\lambda u'(x)$ lorsque h tend vers 0. □

■ **Exemple 3.1** La fonction $f : x \mapsto 4x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto 8x$ ■

3.2 Somme de fonctions dérivables

Propriété 3.2 Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur I.
La fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est définie et dérivable sur I, de dérivée

$$(u+v)' : x \mapsto u'(x)+v'(x)$$

Démonstration 3.2 Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Cette quantité tend, lorsque h tend vers 0, vers $u'(x)+v'(x)$. □

■ **Exemple 3.2** La fonction $f : x \mapsto x^2+3x+5$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto 2x+3$ ■

3.3 Produit de fonctions dérivables

Propriété 3.3 Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur I.
La fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I, de dérivée

$$(uv)' : x \mapsto u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

Démonstration 3.3 Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\
&= v(x+h)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}
\end{aligned}$$

u et v étant dérivables sur I, les quantités $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ et $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tendent respectivement vers $u'(x)$ et $v'(x)$ lorsque h tend vers 0. De plus, $v(x+h)$ tend vers $v(x)$ lorsque h tend vers 0. Ce taux de variation tend donc, lorsque h tend vers 0, vers $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. □

R Le fait que $v(x+h)$ tende vers $v(x)$ lorsque h tend vers 0 n'est en fait pas si évident. Vous aurez plus de précisions l'an prochain, en étudiant la continuité des fonctions. Pour cette année, nous estimerons ce point acquis.

■ **Exemple 3.3** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

- La fonction $u : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x$.
- La fonction $v : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $v' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

La fonction f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$, comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = 2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{3}{2}x\sqrt{x}$$

■

3.4 Quotient de fonctions dérivables

Propriété 3.4 Soit u et v deux fonctions définies dérivables sur I telle que v ne s'annule pas sur I.
La fonction $\dfrac{u}{v} \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est définie et dérivable sur I, de dérivée

$$\left(\frac{u}{v}\right)' : x \mapsto \frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$$

Démonstration 3.4 Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{u}{v}(x+h) - \frac{u}{v}(x)}{h} &= \frac{1}{h} \times \left(\frac{u(x+h)v(x)}{v(x+h)v(x)} - \frac{u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)} \right) \\
&= \frac{1}{h} \times \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)} \\
&= \frac{1}{v(x+h)v(x)} \times \left(\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} - \frac{v(x+h)u(x) - v(x)u(x)}{h} \right) \\
&= \frac{1}{v(x+h)v(x)} \times \left(v(x)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)
\end{aligned}$$

u et v étant dérivables sur I, les quantités $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ et $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tendent respectivement vers $u'(x)$ et $v'(x)$ lorsque h tend vers 0. De plus, $v(x+h)$ tend vers $v(x)$ lorsque h tend vers 0. Ce taux de variation tend donc, lorsque h tend vers 0, vers $\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$. □

■ **Exemple 3.4** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x+2}{3x-7}$.

- Cette fonction est définie pour tout x tel que $3x-7 \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.
- La fonction $u : x \mapsto x^2+2x+2$ est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x+2$
- La fonction $v : x \mapsto 3x-7$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $v'x \mapsto 3$. De plus, cette fonction ne s'annule pas sur les intervalles $\left]-\infty \dfrac{7}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$.

La fonction f est donc dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty \dfrac{7}{3}\right[$ et $\left]\dfrac{7}{3};+\infty\right[$. De plus, pour tout x dans dans l'un de ces intervalles :

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} &= \frac{(2x+2)(3x-7)-3(x^2+2x+2)}{(3x-7)^2} \\
&= \frac{6x^2-14x+6x-14-3x^2-6x-6}{(3x-7)^2} \\
&= \frac{3x^2-14x-20}{(3x-7)^2}
\end{aligned}$$

■

3.5 Composition d'une fonction affine par une fonction dérivable

Propriété 3.5 Soit I un intervalle. Soit m et p deux réels, avec $m \neq 0$ et u une fonction définie et dérivable sur I. Alors la fonction $g : x \mapsto u(mx+p)$ est dérivable sur l'ensemble des x tels que $mx+p \in I$, de dérivée

$$u' : x \mapsto m \times u'(mx+p)$$

Démonstration 3.5 Admise... pour le moment ! □

■ **Exemple 3.5** On considère la fonction $f : x \mapsto (5-3x)^2$. On note u la fonction $x \mapsto x^2$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2x$. Alors pour tout réel x, on a $f(x) = u(5-3x)$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$f'(x) = -3 \times u'(5-3x) = -3 \times 2(5-3x) = 18x-30$$

■

■ **Exemple 3.6** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4x+1}$, définie sur $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$. On note u la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $u' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $4x+1 \in]0;+\infty[\leftrightarrow 4x+1 > 0 \leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$
- Pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$, on a $f(x) = u(4x+1)$.
- Ainsi, f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$, et pour tout x dans cet intervalle,

$$f'(x) = 4 \times u'(4x+1) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$$

■