Exercices V : Fonction dérivée

▪ **Exercice 1** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 3x - 7$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre x et $x+h$.
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression algébrique de sa dérivée f'.

▪ **Exercice 2** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto x^4$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et h un réel non nul. Calculer le taux de variation de f entre x et $x+h$. On rappellera à tout hasard que $x^4 = (x^2)^2$ et que les identités remarquables sont de redoutables alliées.
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression algébrique de sa dérivée f'.

▪ **Exercice 3** (**) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{x^3}$

▪ **Exercice 4** (*) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto 5x+4$	$f_2 : x \mapsto x^9$	$f_3 : x \mapsto 10-8x$
$f_4 : x \mapsto \pi$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$	$f_6 : x \mapsto \sqrt{x}$

▪ **Exercice 5** (*) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto 3x^2 - 9x + 4$	$f_2 : x \mapsto \sqrt{2}x^9 + 8x^7 + 3x^2$	$f_3 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - x^2$
$f_4 : x \mapsto \pi x^5 + 3x - \dfrac{2}{x}$	$f_5 : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	$f_6 : x \mapsto 5x + \sqrt{x}$
$f_7 : x \mapsto x^7 + \dfrac{5}{x^7}$	$f_8 : x \mapsto x^4 + 3\sqrt{3} - \dfrac{1}{2x}$	$f_9 : x \mapsto \dfrac{x^8 + x^5 + x^2}{x^3}$

▪ **Exercice 6** (*) Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

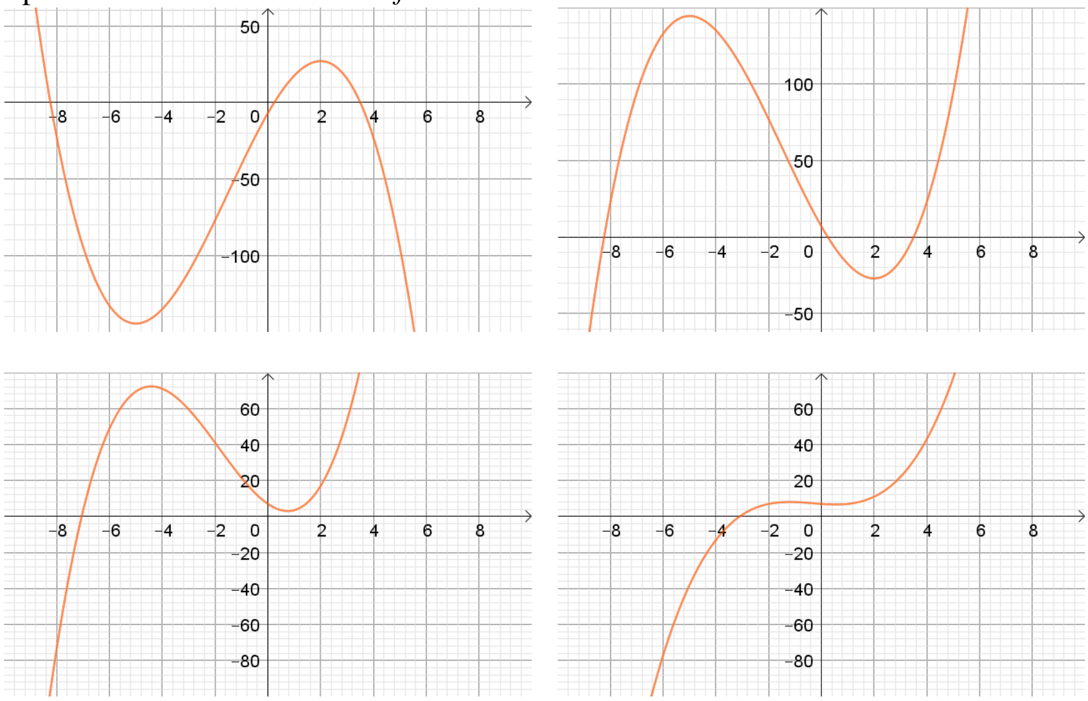
1. Déterminer le domaine de définition D et le domaine de dérivabilité de f
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

▪ **Exercice 7** (**) Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 4$

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.
2. En quelles abscisses la tangente à la courbe représentative de f est-elle horizontale ?

■ **Exercice 8** On considère la fonction f définie pour tout réel x par
$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 30x + 7$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$; donner une expression de sa dérivée f'.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en 1.
3. Déterminer, par le calcul, si la courbe de f admet des tangentes horizontales. En quels valeurs de x se situent ces tangentes ?
4. Sans calcul supplémentaire, parmi les représentationes graphiques suivantes, laquelle peut être celle de la fonction f ? Justifier.



■ **Exercice 9** (**) En économie, on appelle coût marginal de production la variation du coût total de production pour un article supplémentaire. Autrement dit, si le coût total est modélisé par une fonction C et que l'on a produit q objets, le coût marginal du $q+1$-ième objet vaut $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$. Pour cet exercice, on modélise le coût total de production de q objets par

$$C(q) = q^3 - 12q^2 + 72q$$

1. Soit $q \in \mathbb{N}$. Calculer $C(q+1) - C(q)$.
2. Calculer $C'(q)$.
3. On appelle erreur marginale la quantité $C'(q) - C_m(q)$. Calculer cette erreur marginale.

■ **Exercice 10** (**) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est elle-même dérivable sur I, on note f'' (f seconde) sa fonction dérivée, appelée dérivée seconde de f. Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur les intervalles mentionnés, donner une expression de la fonction dérivée seconde.

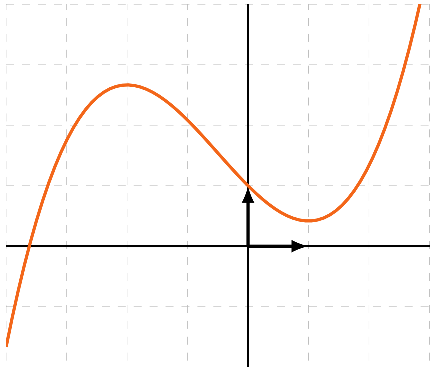
$f_1 : x \mapsto 8x^2 - 14x + 7$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto 3x^7 + 5x^3$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \frac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto 74x + 149$ sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto 4x^7 - \frac{1}{5x^2}$ sur $]-\infty;0[$

■ **Exercice 11** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + 1$. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.

1. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.
3. Résoudre par le calcul l'équation $f'(x) = 0$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
5. Tracer cette tangente sur le graphique ci-contre.



■ **Exercice 12** (*) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 + 4x + 2)(3x^2 + 2x + 1)$.
1. Quelle est la dérivée de la fonction $u : x \mapsto 2x^2 + 4x + 2$?
2. Quelle est la dérivée de la fonction $v : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$?
3. En utilisant la formule de la dérivée d'une produit de fonctions dérivables.
4. Développer $f(x)$ et dériver. Retrouver l'expression de la dérivée f' donnée à la question 1.

■ **Exercice 13** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto (5x - 3)\sqrt{x}$.
1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Quel est le domaine de dérivabilité de f ?
3. Donner une expression de la dérivée f'.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

■ **Exercice 14** (**) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto x\sqrt{x}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto (x^2 + 3)(x + 1)$

$f_3 : x \mapsto (3 - x^2)(x^3 - 5)$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto (2x + \sqrt{x})(1 - 3\sqrt{x})$

■ **Exercice 15** (**) On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$.
1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, que vaut $f'(x)$?
2. Soit h un réel positif, non nul. Que vaut $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$?
3. En déduire que f est également dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

■ **Exercice 16** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x - 5}{3x + 9}$
1. Donner le domaine de définition de f
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée f'.

■ **Exercice 17** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x}$
1. Donner le domaine de définition de f
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée f'.

■ **Exercice 18** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+3x-4}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée f'.

■ **Exercice 19** (**) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x}{3x^2+1} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1} \qquad f_3 : x \mapsto (8x+2)(3x-1)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{2x}{3x-9} \qquad f_5 : x \mapsto 5x+\frac{1}{3x+2} \qquad f_6 : x \mapsto \frac{x^2-3}{x^3-1}$$

$$f_7 : x \mapsto \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1\right) \qquad f_8 : x \mapsto \frac{x^2-2x+3}{4x^2+3x-1} \qquad f_9 : x \mapsto \sqrt{x}\times\frac{2x+5}{3x-2}$$

■ **Exercice 20** (***) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(3x-5)(2x^2-3x)}{(2x^2+10x-12)(3x-4)}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Donner le domaine de dérivabilité de f ainsi que sa dérivée f'.

■ **Exercice 21** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto (4x+3)^2$. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée f'.

■ **Exercice 22** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto (5x+9)^3$. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition et donner sa dérivée f'.

■ **Exercice 23** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{7x-5}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Donner le domaine de dérivabilité de f ainsi que sa dérivée f'.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 3$.

■ **Exercice 24** (**) On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{18-5x}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Donner le domaine de dérivabilité de f ainsi que sa dérivée f'.

■ **Exercice 25** (**) Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$$f_1 : x \mapsto (4x+7)^2 \qquad f_2 : x \mapsto \frac{1}{2x-5} \qquad f_3 : x \mapsto (7x-8)^3$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{3x-2} \qquad f_5 : x \mapsto (6-2x)^4 \qquad f_6 : x \mapsto \frac{-4}{(x+7)^2}$$

$$f_7 : x \mapsto (x^2+3)\sqrt{3-8x} \qquad f_8 : x \mapsto \frac{\sqrt{7x+12}}{3x+8} \qquad f_9 : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{3x-8}}$$