Exercices VI : Suites (2)

▪ **Exercice 1** (*) Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $r = 4$. Calculer u_1, u_2 et u_5.

▪ **Exercice 2** (*) On considère (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = \frac{2}{5}$ et de raison $r = -\frac{1}{3}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

▪ **Exercice 3** (**) Soit (u_n) une suite telle que $u_3 < u_4$ et $u_5 < u_4$? La suite (u_n) peut-elle être arithmétique ?

▪ **Exercice 4** (**) La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 2n$ est-elle arithmétique ?

▪ **Exercice 5** (**) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+7)^2 - (n-3)^2$. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

▪ **Exercice 6** (*) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -2 et telle que $u_9 = 61$. Que vaut u_0 ?

▪ **Exercice 7** (*) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_3 = 8$ et $u_9 = -16$. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

▪ **Exercice 8** (**) Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{30} = 25$ et $u_{140} = 49$. Que vaut u_{300} ?

▪ **Exercice 9** (*) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 2 - \sqrt{2}$. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

▪ **Exercice 10** (*) Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 12 - 3n$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Justifier que (u_n) est arithmétique. Quelle est sa raison ?
3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
4. A partir de quel rang n a-t-on $u_n < 50$?

▪ **Exercice 11** **(Bac STMG Polynésie II - 2014)** D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59.9 ans en 1946 à 78.5 ans en 2012.
On se propose ici de modéliser l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 59.9$ et de raison $r = 0.25$. Ainsi, U_n est l'espérance de vie à la naissance pour les hommes à l'année $1946 + n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3. A quoi correspondent ces valeurs ?
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Entre 1946 et 2012, les hommes ont-ils gagné, en réalité, plus de 3 mois d'espérance de vie chaque année en moyenne ?
4. Selon ce modèle, en quelle année l'espérance de vie pour les hommes dépassera-t-elle les 85 ans ?

■ **Exercice 12** (**) Calculer les sommes suivantes
- $1+2+3+\ldots+25$
- $1+3+5+\ldots+37$
- $8+12+16+\ldots+244$
- $9+7+5+\ldots+(-21)$

■ **Exercice 13** Une personne souscrit un abonnement à un service de séries à la demande. En 2020, celle-ci paye 30 euros pour un an mais l'abonnement augmente de 2 euros par an. On appelle a_n le prix de l'abonnement pour l'année $2020+n$. note

1. Que vaut a_1 ?
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
3. Combien la personne paiera-t-elle son abonnement d'un an en 2030 ?
4. Si la personne reste abonnée de 2020 à 2030, combien aura-t-elle déboursé au total ?

■ **Exercice 14** (***) Pour quelle valeur de n a-t-on l'égalité suivante ?

$$3+6+9+\ldots+3(n-1)+3n=2583$$

■ **Exercice 15** (***) Soit $n\in\mathbb{N}$. On cherche à déterminer la valeur de la somme suivante : $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $u_n=(n+1)^3-n^3$. On admettra que $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$

1. Montrer que $u_n=3n^2+3n+1$
2. Justifier que $u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)^3-1$
3. En exprimant la somme $u_1+u_2+\ldots+u_n$ d'une autre façon, déterminer la valeur de la somme $1^2+2^2+\ldots+n^2$

■ **Exercice 16** (*) Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $u_3=64$. Déterminer u_0, u_2, u_4, u_5 et u_8.

■ **Exercice 17** (**) Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_4=4$ et $u_6=36$. Que peuvent valoir u_5 et u_7 ?

■ **Exercice 18** (**) Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_{44}=-2$ et $u_{47}=54$. Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

■ **Exercice 19** (***) Soit (u_n) une suite arithmétique et géométrique. Montrer que (u_n) est constante.

■ **Exercice 20** (*) Soit (u_n) une suite géométrique de raison -1 telle que $u_0=\pi$. Que vaut u_{2021} ?

■ **Exercice 21** (**) Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0=\frac{1}{256}$ et de raison 2. Que vaut u_{10} ?

■ **Exercice 22** On dispose d'une feuille de papier d'une épaisseur de 0.1 mm. On plie cette feuille en deux, donnant une feuille pliée dont l'épaisseur est de 0.2 mm. On plie alors de nouveau la feuille pliée, et on recommence, ainsi de suite.
Sachant que la distance de la Terre à la Lune est de 384400 km, combien de fois faut-il plier la feuille de départ sur elle-même pour que l'épaisseur de la feuille ainsi pliée soit plus grande que la distance Terre-Lune ?

■ **Exercice 23** (* - **Classique**) On s'intéresse à l'évolution de la population de la ville Mathématopolis. En 2020, la population de cette ville était de 10000 habitants. Deux modèles d'évolution de la population sont proposées

1. **Modèle A** : On suppose que la population de la ville augmente de 200 habitants chaque année. On note u_n la population de la ville à l'année $2020+n$ selon ce modèle.
   (a) Que représente u_1 ? Calculer sa valeur.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
   (c) Selon ce modèle, quelle sera la population de la ville en 2020 ?
2. **Modèle B** : On suppose désormais que la population augmente de 1% par an. On note (v_n) la population de la ville pour l'année $2020+n$ selon ce modèle.
   (a) Déterminer v_1 et v_2.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Selon ce modèle, quelle sera la population de la ville en 2030 ? Arrondir à l'unité si nécessaire.
3. La population donnée par la modèle B sera-t-elle toujours inférieur à la population donnée par le modèle A ?

■ **Exercice 24** (*) Dans chacun des cas suivants, déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \pi u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 10^{2021} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -21 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 5^n$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 \times \left(\dfrac{47}{48}\right)^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -3 \times 1.01^n$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{9}\right)^n$

■ **Exercice 25** (** - **Classique**) On considère la suite u_n définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4000 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0.8u_n + 1000 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5000$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n. Quelle est la limite de (u_n) ?

■ **Exercice 26** (**) **(BAC S Asie - 2019)** La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80° C dans un milieu dont la température est de 10 degrés Celsius.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton en utilisant une suite.
Pour tout entier naturel n, on note T_n la température après n minutes. Cette température est exprimée en degré Celsius. Pour tout entier n, on a alors $T_{n+1} - T_n = -0.2(T_n - 10)$

1. D'après le contexte, quel doit être le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0.8T_n + 2$
3. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = T_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $T_n = 70 \times 0.8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n)
4. On considère l'algorithme suivant, écrit en langage Python

```
n = 0
T = 80
while T > 30 :
    T = 0.8 * T + 2
    n = n + 1
```

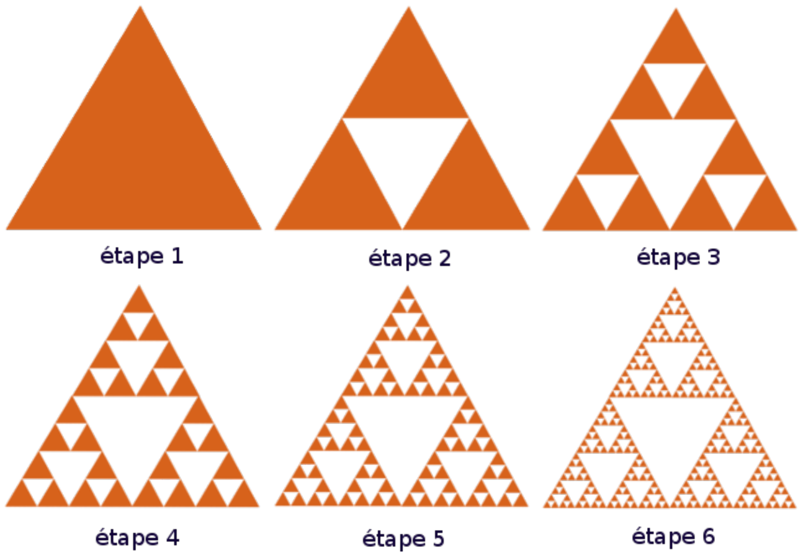
   Après avoir exécuté l'algorithme, la valeur de la variable n est de 6. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

■ **Exercice 27** (*) Calculer les sommes suivantes

- $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024$
- $3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{12}$
- $8 + 4 + 2 + \ldots + \dfrac{1}{32}$

■ **Exercice 28** (**) Une personne s'abonne à un club de sport pour 300 euros l'année. Le tarif d'adhésion augmente de 5% chaque année. Quelle somme totale, arrondie à l'euro près, aura versé cette personne si elle s'abonne tous les ans pendant 10 ans ? Pendant 15 ans ?

■ **Exercice 29** (**) Le triangle de Sirpienski est une figure fractale obtenue comme suit :
- On part d'un triangle équilatéral plein
- On découpe ce triangle en quatre triangles équilatéraux et on retire le triangle central
- On recommence ainsi avec les trois triangles équilatéraux pleins restants.



1. On note t_n le nombre de triangle retirés entre l'étape n et l'étape $n+1$. Ainsi, t_1 est le nombre de triangle retirés entre l'étape 1 et l'étape 2.
   (a) Que valent t_2, t_3 ? Quelle semble être la nature de la suite (t_n) ?
   (b) Quel sera alors t_6, le nombre de triangles retirés entre l'étape 6 et l'étape 7 ?
2. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, déterminer le nombre total de triangles retirés de l'étape 1 à l'étape 16 de la construction du triangle.
3. On suppose qu'à l'étape 1, l'aire du triangle équilatéral vaut 1. Quelle est l'aire colorée à l'étape 2 ?
4. On note a_n l'aire de la figure à l'étape n. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? En déduire la limite de la suite (a_n).
5. A partir de quelle valeur de n aura-t-on $a_n < 0.05$?

■ **Exercice 30** (***) **Paradoxe de Zénon** : Zénon est un philosophe grec antique à l'origine du paradoxe suivant.
Le grec Achille et une tortue font une course. Achille étant deux fois plus rapide que la tortue, il la laisse partir avec 1 kilomètre d'avance.
Le départ est donné, Achille parcourt le premier kilomètre. Pendant ce temps, la tortue parcourt 500 mètres. Achille parcourt lui aussi, à son tour, 500 mètres. La tortue continue d'avancer pendant ce temps, et ainsi de suite.
Zénon en vient à la conclusion que par ce raisonnement, Achille ne rattrapera jamais la tortue. Quelle peut-être la faille ?