Chapitre VI : Suites arithmétiques, géométriques

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition récursive

Définition 1.1 Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la "raison" de la suite.

■ **Exemple 1.1** La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

est arithmétique, de raison 4 ■

■ **Exemple 1.2** La suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2n + 7$ est arithmétique de raison -2. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 7 - (-2n+7) = -2$. Ainsi, $u_{n+1} = u_n - 2$. ■

1.2 Terme général

Propriété 1.1 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration 1.1 On a :

- $u_0 = u_0 + 0 \times r$
- $u_1 = u_0 + r$
- $u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r$
- ...
- $u_n = u_{n-1} + r = u_0 + (n-1)r + r = u_0 + nr$

□

R En Terminale, vous découvrirez une démonstration plus rigoureuse que celle-ci : la démonstration par récurrence.

■ **Exemple 1.3** Soit (u_n) la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + (-3) \times n = 5 - 3n$. En particulier, $u_{100} = 5 - 3 \times 100 = -295$ ■

1.3 Variations et limite

Propriété 1.2 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante et sa limite vaut $+\infty$.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante et sa limite vaut $-\infty$

Démonstration 1.2 Il suffit de remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$ □

1.4 Somme de termes

Propriété 1.3 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

R Cette propriété se note $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Démonstration 1.3 Notons $S = 1+2+3+\ldots+n$.
En réordonnant les termes, on a également $S = n+\ldots+3+2+1$.
En additionnant alors les deux égalités, on a

$$S+S = 1+n+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(n-2+3)+(n-1+2)+n+1 = n(n+1)$$

d'où $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ □

Propriété 1.4 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} = \text{Nombre de termes } \times \frac{\text{Premier terme + Dernier terme}}{2}$$

Démonstration 1.4 On rappelle que pour une suite (u_n) arithmétique, de raison r, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + rn$$

Ainsi,

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\ldots+(u_0+rn)$$

D'où

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = (n+1)u_0+r+2r+3r+\cdots+rn = (n+1)u_0+r(1+2+\ldots+n)$$

En utilisant le résultat précédent, on a donc

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = (n+1)u_0+r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)u_0+rn(n+1)}{2}$$

On trouve alors

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_0+rn)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

□

R Cette propriété se note $\sum_{i=0}^{n} u_i = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$

2 Suites géométriques

Définition 2.1 Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est appelé la "raison" de la suite.

■ **Exemple 2.1** La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

est géométrique, de raison 2. ■

2.1 Terme général

Propriété 2.1 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = q^n \times u_0$$

Démonstration 2.1 On a :
- $u_0 = u_0 \times q^0$
- $u_1 = q \times u_0 = q^1 \times u_0$
- $u_2 = q \times u_1 = q \times q \times u_0 = q^2 \times u_0$
- ...
- $u_n = q \times u_{n-1} = q \times q^{n-1} \times u_0 = q^n \times u_0$

□

2.2 Variations et limite

Propriété 2.2 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On suppose $u_0 \neq 0$.
- Si $q < 0$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est :
  - strictement décroissante si $u_0 > 0$
  - strictement croissante si $u_0 < 0$
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est :
  - strictement croissante si $u_0 > 0$
  - strictement décroissante si $u_0 < 0$

Démonstration 2.2 **Cas 1 : $q < 0$:** dans ce cas, les termes de la suite (u_n) changent de signe à chaque rang. La suite ne peut donc être monotone.
Cas 2 : $0 < q < 1$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$$

Or, $q - 1 < 0$, donc $u_0 q^n (q-1)$ est du signe opposé à u_0, d'où la conclusion.
Cas 3 : $q > 1$: On procède de la même manière mais cette fois, $q - 1 > 0$. □

Propriété 2.3 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
- Si $-1 < q < 1$, alors u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+_infty$.
- Si $q < -1$, la suite (u_n) n'admet aucune limite, finie ou infinie.
- Si $q > 1$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ si $u_0 >$, vers $-\infty$ si $u_0 < 0$

2.3 Somme de termes d'une suite géométrique

Propriété 2.4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et q un réel différent de 1. Alors,

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration 2.3 Notons $S = 1+q+q^2+\ldots+q^n$. Ainsi,

$$qS = q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}$$

D'où

$$S-qS = (1-q)S = 1+q+q^2+\ldots+q^n-(q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$$

Puisque $q \neq 1$, on a donc

$$S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

□

R Cette propriété s'écrit également $\sum_{i=0}^{n} q^i = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Propriété 2.5 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q différente de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_0+u_1+\ldots u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \text{Premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{Nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

Démonstration 2.4 On rappelle que pour une suite (u_n) géométrique, de raison q, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0q^n$$

Ainsi,

$$u_0+u_1+\ldots+u_n = u_0+u_0q+u_0q^2+\ldots+u_0q^n = u_0(1+q+q^2+\ldots+q^n) = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

□