Suites et récurrence

1 Principe

Exemple introductif, tiré de l'épreuve de spécialité de Polynésie 2022 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

A l'aide de cette expression, il est possible de calculer les termes de la suite de proche en proche.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.
- $\ldots$

Toutefois, il n'est pas possible de calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents... On souhaiterait déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

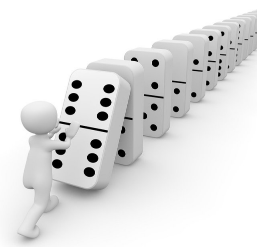
D'après les premiers termes de notre suite, il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette formule fonction pour les rangs 0, 1, 2 et 3 mais qu'en est-il pour le reste ?

Un moyen de s'assurer que cette formule fonctionne pour tous les rangs est de la démontrer par récurrence.

Définition 1 : Lorsque l'on souhaite démontrer une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, il est parfois possible de démontrer cette proposition par récurrence.

Pour tout entier n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition qui nous intéresse. La démonstration par récurrence comporte trois étapes

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : on montre que, si pour un certain entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également ;
- **Conclusion** : on en conclut que pour entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n = \dfrac{1}{n+1}$".

- **Initialisation** : Pour $n = 0$.

$$\frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 = u_0$$

La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. A partir de ce résultat, on souhaite démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$

Nous avons donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+2}$$

On trouve bien que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Nous avons montré que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. ■

Une propriété utile qui peut être démontrée par récurrence est la suivante. Souvenez-vous en, elle reviendra dans un prochain chapitre !

Propriété 1 — Inégalité de Bernoulli. : Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$

Démonstration 1.1 : Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Pour un entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$(1+a)^n \geqslant 1+na$".

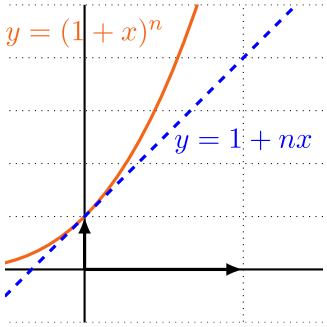
- **Initialisation** : Prenons $n = 0$.
  - D'une part, $(1+a)^0 = 1$
  - D'autre part, $1 + 0 \times a = 1$.

  On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$. Or,

$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a$$

  Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

□



La droite d'équation $y = 1 + nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x > 0$.

Nous verrons, lorsque la dérivation n'aura plus de secret pour vous, que cette remarque nous fournira une autre démonstration de l'inégalité de Bernoulli.

2 Application 1 : Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2 : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que...

- ...(u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
- ...(u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
- ...(u_n) est bornée si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

R Les majorants et minorants sont indépendants de n ! Bien que pour tout $n > 0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée.

■ **Exemple 2 :** Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. ■

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2 + 1$. La suite (v_n) est minorée puisque pour tout n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée. ■

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n n$. La suite (w_n) n'est ni majorée, ni minorée. ■

R Lorsque la suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration peut être démontrée par récurrence.

■ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$u_n \geqslant 4$".

- **Initialisation** : On a bien $u_0 \geqslant 4$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 4$. Ainsi, $0.5u_n \geqslant 2$ et $0.5u_n + 2 \geqslant 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 4$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathcal{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

■

3 Application 2 : suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3 : Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite strictement positive et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, ses variations peuvent également être étudiées par récurrence.

■ **Exemple 6 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n démontrera que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, un résultat qui nous intéressera fortement dans un prochain chapitre...

- **Initialisation :** $u_0 = 4$, $u_1 = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

En ajoutant 5 à chaque membre, on obtient

$$5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5$$

On souhaite "appliquer la racine carrée" à cette inégalité. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante, l'appliquer ne changera pas le sens de l'inégalité. On a donc bien

$$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 5} \leqslant \sqrt{u_n + 5}$$

D'une part, $\sqrt{5} > 0$. D'autre part, $\sqrt{u_{n+1} + 5} = u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n + 5} = u_{n+1}$. Ainsi

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

■