Exercices : Suites et récurrence

1 Principe

► **Exercice 1**
Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + rn$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

► **Exercice 2**
Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n
   (b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

► **Exercice 3**
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

► **Exercice 4**
On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

1. Calculer u_2 et u_3
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► **Exercice 5**
On considère la suite u_n définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$$

► Exercice 6
Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1. Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est vraie
2. Soit n un entier naturel non nul tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   (a) Ecrire $\mathcal{P}(n+1)$
   (b) En partant de la proposition $\mathcal{P}(n)$, montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. Conclure à l'aide du principe de récurrence.

► Exercice 7
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit

$$\begin{cases} x_0=-4 \\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=0.8x_n-0.6y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0=3 \\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ y_{n+1}=0.6x_n+0.8y_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2+y_n^2=25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

► Exercice 8
On rappelle que pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x\mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est également dérivable, de dérivée $f_n' : x\mapsto n\,x^{n-1}$ Nous allons le démontrer par récurrence.

1. Soit u et v deux fonctions dérivables. Rappeler la formule de la dérivée de uv.
2. Rappeler les dérivées des fonctions $x\mapsto x$, $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto x^3$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition "pour tout réel x, $f_n'(x)=n\,x^{n-1}$". Démontrer cette proposition par récurrence.

► Exercice 9
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

2 Suites majorées, minorées, bornées

► Exercice 10
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

$u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$ pour $n\neq 0$ $\qquad u_n=\cos(n)+\sin(n)$ $\qquad u_n=-3\cos(n)+2\sin(n)$

$u_n=2\cos(n)-n$ $\qquad u_n=\cos(n)+3$ $\qquad u_n=\dfrac{n}{n+1}$

► Exercice 11
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{2}{10}\,u_n+8$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 10$.

► Exercice 12
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3 \leqslant u_n \leqslant 5$

► Exercice 13
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

► Exercice 14
On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

1. Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0; 1]$
2. Étudier le signe de $f'(x)$
3. En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

3 Suites croissantes, suites décroissantes

► Exercice 15
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$
2. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

► Exercice 16
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$
2. Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

► Exercice 17
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + u_n}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante

► Exercice 18
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 7$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

► Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

► Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

► Exercice 21

On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{u_n}$.

1. Que se passe-t-il si $u_0 = 1$?
2. Trouver une autre valeur de u_0 pour laquelle la suite est constante.
3. On suppose que $u_0 \in]1; 2[$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. On suppose que $u_0 > 2$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$ et que la suite (u_n) est décroissante.
5. On suppose que $0 < u_0 < 1$.
   (a) Montrer que $u_2 > 2$
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.

► Exercice 22 — Suites arithmético-géométriques.

Soit a et b deux réels, avec a différent de 0 et 1. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = a\,u_n + b$$

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$, d'inconnue réelle x. On note r la solution de cette équation.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r$$

3. On propose de montrer ce résultat par une autre méthode. On considère pour cela la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par $c_n = u_n - r$.
   (a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour tout entier naturel n.
   (b) Quelle est la nature de la quite (c_n) ?
   (c) En déduire une expression de c_n puis de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.