Limites de suite

1 Limite d'une suite

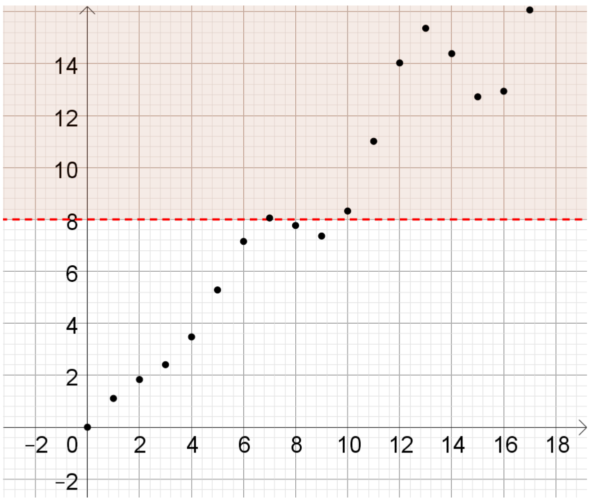
1.1 Limite infinie

Définition 1 : Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

R La première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 8$.



On remarque que $u_7 \geqslant 8$. Cependant, les termes suivants sont inférieurs à 8 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil A. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 10$, on a bien $u_n \geqslant 8$.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 8$ tient pour toutes les valeurs de A, aussi grandes soient-elles : la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Naturellement, plus la valeur de A est grande, plus la valeur à partir de laquelle tous les termes de la suite sont tous plus grands que A sera lointaine.

Il faut par ailleurs remarquer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante : cette suite ici représentée en est un exemple.

■ **Exemple 1 :** Pour tout n, on pose $u_n = n^2$. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, fixons un réel A.

- Si $A < 0$, alors pour tout n, $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, alors pour tout n supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, $u_n = n^2 \geqslant \sqrt{A}^2 = A$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}+$.

Dans tous les cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A, peu importe le réel A choisi : la suite (u_n) tend donc vers $+\infty$. ■

R Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée. Pour tout n, posons $u_n = (1 + (-1)^n)\,n$. La suite (u_n) n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands. Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0. Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang.

1.2 Limite finie : suite convergente

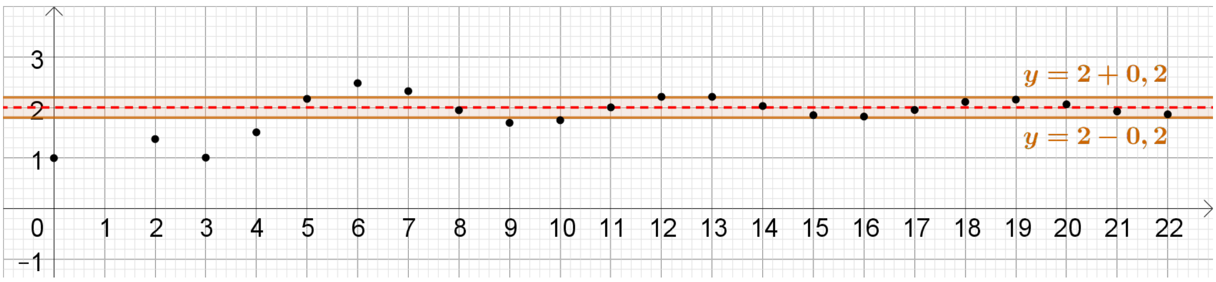
Définition 2 : Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. On dit que u_n tend vers l – ou que l est la limite de la suite (u_n) – lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Si une telle limite existe, alors elle est unique. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Une suite qui admet une limite finie est dite convergente. Dans le cas contraire, on parle de suite divergente : cela regroupe les suites qui ont une limite infinie mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2. Par exemple, si on prend $\varepsilon = 0,2$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$ à partir du rang 14. Ce raisonnement vaudra pour n'importe quelle valeur de ε, aussi petite soit-elle.

R Pour la culture : Bien que la définition formelle de suite convergente ne date que de 400 ans environ, les premières notions de suite convergente apparaissent déjà dans les *Éléments* d'Euclide, écrits 2000 ans encore plus tôt. Euclide écrit ainsi :

> "Étant données deux grandeurs inégales, si, de la plus grande on retranche plus que la moitié, et que du reste on retranche plus que la moitié et si l'on continue toujours ainsi, nous aboutirons à une grandeur inférieure à la plus petite des grandeurs donnée."

Autrement dit, si l'on considère une suite (u_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}$, alors cette suite est plus petite que tout réel $\epsilon > 0$ à partir d'un certain rang. En d'autre termes, cette suite tend vers 0.

■ **Exemple 2 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.
Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite. Ainsi, $u_0 = \dfrac{1}{5}$, $u_{10} = \dfrac{21}{45} \simeq 0.467$, $u_{100} = \dfrac{201}{405} \simeq 0.496$... Il semble que la suite soit convergente et que sa limite vaille $\dfrac{1}{2}$.

Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N à partir duquel, pour tout $n > N$, on ait $u_n \in \left]\dfrac{1}{2} - \varepsilon; \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{2(2n+5)} - \frac{4n+5}{2(2n+5)} = \frac{-3}{2(2n+5)}$$

Cette quantité est négative. On a alors

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(2n+5)}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(2n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n+5 > \frac{2}{3\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{1}{3\varepsilon} - \dfrac{5}{2}$, on a $u_n \in \left]\dfrac{1}{2} - \varepsilon; \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right[$. La suite (u_n) est bien convergente et sa limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

Par exemple, si $\varepsilon = 0.001$, on a $\dfrac{1}{3\varepsilon} - \dfrac{5}{2} \simeq 330,8$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 331$, on a $0.499 \leqslant u_n \leqslant 0.501$. ■

R Nous verrons très bientôt des résultats qui nous permettront de passer outre cet aspect formel. Même si une telle démonstration de la convergence d'une suite n'est que rarement demandé en classe de terminale, comprendre les bases de ce raisonnement constituera un avantage certain dans les études supérieures.

Propriété 1 : Si une suite est convergente, elle est bornée. Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

R La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente. Par exemple, pour tout n, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous -1. Une limite étant unique, la suite (u_n) ne peut être convergente.

1.3 Limites de suites usuelles

Propriété 2 : Les limites suivantes sont à connaître

- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$.
- Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$,
- Les suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ n'admettent pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite de la somme

Propriété 3 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2+e^{-n}-4$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ■

R Les cas où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément.

■ **Exemple 4 :** Pour tout n, on pose $u_n = n$ et $v_n = 1-n$. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Or, pour tout entier n, $u_n + v_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 1$ ■

2.2 Limite du produit

Propriété 4 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2.

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l_2	∞	∞	∞
$\lim_{n\to+\infty} (u_n\, v_n)$	$l_1\, l_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 5 :** Pour tout n, on pose $u_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n} - 4\right) = -4$.
- $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty$.
- Finalement, d'après les règles de calcul de limite d'un produit, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■

■ **Exemple 6 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n v_n = 2$. ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n w_n = 2n$. ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

On voit sur cet exemple que le produit d'une limite infinie et d'une limite qui vaut 0 peut aboutir à plusieurs résultats différents. ■

2.3 Limite du quotient

Propriété 5 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telle que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels l_1 et l_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l_2 \neq 0$	∞	0 (signe constant)	l_2	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**	

r.s. : Règle des signes

Signe constant : à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (v_n) sont du même signe.

■ **Exemple 7 :** Pour tout entier n on pose $u_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$.
- Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

■

2.4 Formes indéterminées

Factorisation par le terme dominant

■ **Exemple 8 :** Pour tout n, on pose $u_n = 4n^2+2n+3$ et $v_n = 3n^2+7n-1$. On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas "$\dfrac{\infty}{\infty}$". Il est toutefois possible de factoriser u_n et v_n par leur terme de plus haut degré (ici, n^2). Pour tout entier $n > 0$,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4n^2+2n+3}{3n^2+7n-1} = \frac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$$

Or,

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = 4$

- $\lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{7}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 3$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{4}{3}$ ■

Quantité conjuguée

Propriété 6 : Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
On admettra de plus que si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$, avec $a \geqslant 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

■ **Exemple 9 :** Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite. Or,

$$u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

Le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. ■

R Il est parfois nécessaire de combiner les deux approches vues ci-dessus. On pourra par exemple utiliser le fait que, pour tout $n > 0$, $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$.