Exercices : Limites de suite

1 Limites de suites

► **Exercice 1 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n}$

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100$
2. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100000$
3. Soi A un réel quelconque. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$
4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

► **Exercice 2 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 - 3n$.

1. Calculer u_{30}, u_{70}, u_{1000}. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit A un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite (u_n) ?

► **Exercice 3 :** Pour tout entier naturel n, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$.

A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

► **Exercice 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

► **Exercice 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
2. Cette limite change-t-elle si $u_0 = 3$?

► **Exercice 6 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) semble-t-elle avoir une limite ?

► **Exercice 7 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1. Donner des valeurs approchées au centième de u_{10}, u_{100}, u_{1000}
2. La suite (u_n) semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4. En déduire que $|u_n - 3| = u_n - 3$. On rappelle que la valeur absolue d'un réel x vaut x si ce réel est positif et $-x$ sinon.
5. Résoudre l'inéquation $u_n - 3 < 0.1$
6. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
7. Conclure sur la convergence de la suite (u_n).

2 Opérations sur les limites

▶ **Exercice 8 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = n^2 + \sqrt{n} \qquad u_n = \frac{1}{n} - n^3$$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n \qquad u_n = -6n^2 + 1 + \frac{1}{n} \text{ pour } n > 0$$

▶ **Exercice 9 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right) \qquad u_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right) \qquad u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$$

▶ **Exercice 10 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \frac{e^n}{1 + \frac{1}{n}} \qquad u_n = \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} \qquad u_n = \frac{1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}} \qquad u_n = \frac{5 + \frac{2}{n^2}}{n^3 + \frac{1}{n}}$$

▶ **Exercice 11 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = n^2 - n \qquad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right) \qquad u_n = \frac{3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

$$u_n = -2n^2 - \frac{5}{n+1} \qquad u_n = \frac{5}{-1-n} \qquad u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$$

3 Formes indéterminées

▶ **Exercice 12 :** Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

▶ **Exercice 13 :** Donner deux suites (u_n) et (v_n) t.q. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$.

▶ **Exercice 14 :** En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

$$u_n = \frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} \qquad u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 3} \qquad u_n = \frac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$$

$$u_n = \frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1} \qquad u_n = \frac{(n-1)(n^2+1)}{2 - 3n^2} \qquad u_n = \frac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3} \text{ pour } n > 0$$

▶ **Exercice 15 :** Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}\left(4n^3+2n^2+5+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(-5n^3+2n^2+4n-\frac{5}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^4+n^3+2n-\frac{4}{n}}{-n^3-5n+\frac{6}{n^4}}\right) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^7+2n^5-4n^3+2-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^8}}{3n^7+4n^3-5n^2+\frac{2}{n^3}}\right)$$

▶ **Exercice 16 :** Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

$$u_n=\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8} \qquad u_n=\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}} \qquad u_n=\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+2}$$

▶ **Exercice 17 :** Pour tout entier naturel $n>1$, on pose $u_n=\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}$.

1. En utilisant la quantité conjuguée, montrer que pour tout entier naturel $n>1$

$$u_n=\frac{4n}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel $n>1$,

$$u_n=\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

3. En déduire, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite (u_n).

4 Exercices d'approfondissement

▶ **Exercice 18 — Suite auxiliaire. :** On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0<u_n<3$
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=\dfrac{1}{3-u_n}$
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n}$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera a_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de a_n.
   (c) En déduire que la suite (a_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (d) Exprimer a_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (e) En déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n
   (f) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

► **Exercice 19 :** Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Démontrer les propositions vraies et donner un contre-exemple aux propositions fausses.

1. Si une suite est majorée, alors elle converge
2. Si une suite (u_n) est strictement croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Si une suite est convergente, alors elle est bornée.
4. Si deux suites (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
5. Si deux suites (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n v_n)$ diverge.
6. Si une suite (u_n) diverge et une suite (v_n) converge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
7. Si une suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

► **Exercice 20 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
2. Quel est le sens de variations de la suite (s_n) ?
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
4. En déduire une expression simplifiée de s_n pour tout entier naturel n.
5. Quelle est la limite de la suite (s_n) ?

► **Exercice 21 :** On considère les suite (u_n) et (v_n) définies comme suit

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_n - u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite (w_n) est constante.
5. On admet que (u_n) et (v_n) admettent une même limite l. Déterminer la valeur de l.