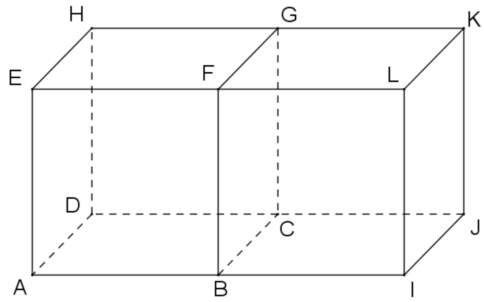
Exercices : Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

► Exercice 1
On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes :

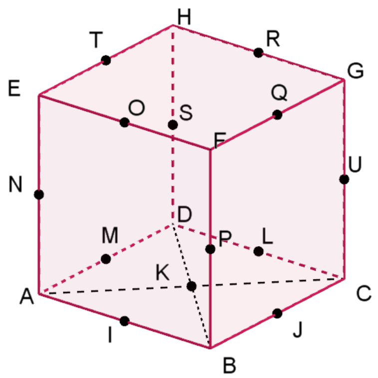
- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$



► Exercice 2
En utilisant la même figure, exprimer...

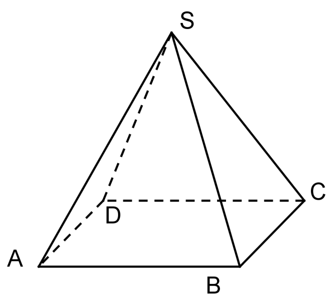
- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$

► Exercice 3
Sur la même figure, où se trouve le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CK}$?



► Exercice 4
On considère un cube ABCDEFGH sur lequel on a placé les milieux des arêtes ainsi que le centre de la face ABCD. Donner...

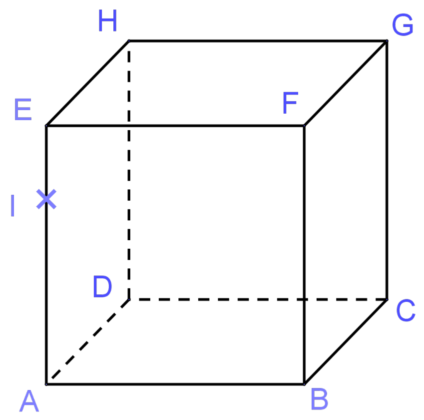
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{TR}$
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{OJ}$
- Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$
- Deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DK}$
- Deux vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$



► Exercice 5
On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$. Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

2 Droites et plans de l'espace



▶ Exercice 6

On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$. Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

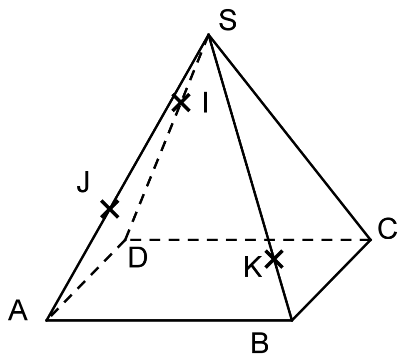
▶ Exercice 7

Sur le cube précédent, déterminer...

- ... l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
- ... un plan parallèle au plan (BFG).
- ... l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
- ... l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
- ... un plan parallèle au plan (IEB)

▶ Exercice 8

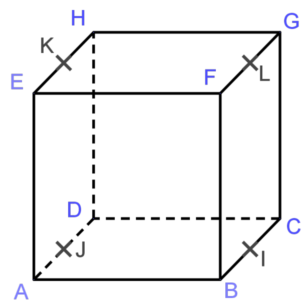
On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (JK) et (AB) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD)



1. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2. Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3. Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (BD) se trouve sur cette droite.

► Exercice 9

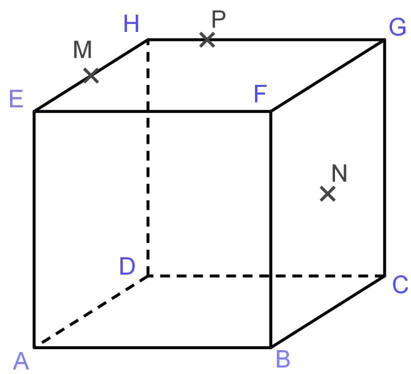
On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs de $[BC]$, $[AD]$, $[EH]$ et $[FG]$



1. Montrer que $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AK}$
2. En déduire que le point L appartient au plan (AKB)
3. Montrer que le point J appartient au plan (GHI)
4. Montrer que les plans (GHI) et (AKB) sont parallèles.

► Exercice 10 — BAC S – Rochambeau 2014.

On considère un cube $ABCDEFGH$. On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

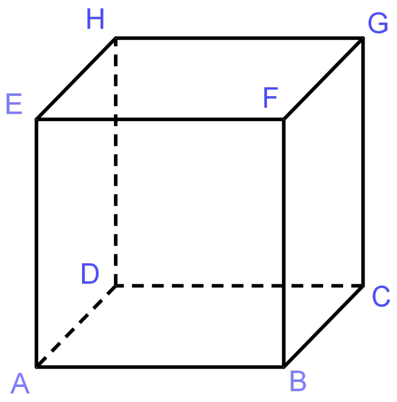


1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L (vous pouvez reproduire la figure sur une autre feuille, les constructions peuvent déborder du cadre).
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   (a) Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3 Repère de l'espace

▶ Exercice 11

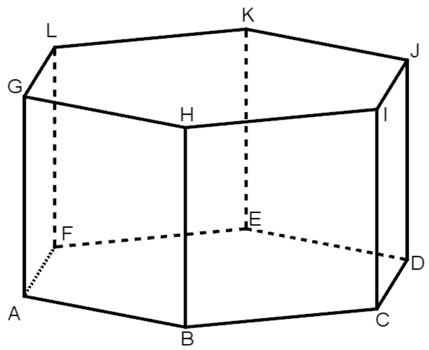
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AG}; \overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB})$.

▶ Exercice 12

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEFGH$.



1. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$.
   (a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$.

▶ Exercice 13

On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1; -1; 2)$, $B(5; 1; 8)$, $C(-3; 2; -1)$ et $D(-1; 3; 2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

▶ Exercice 14

On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1; 3; 5)$, $B(2; 7; -1)$ et $C(5; 19; -19)$

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

▶ Exercice 15
On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

▶ Exercice 16
On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$

▶ Exercice 17
On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

4 Représentations paramétriques de droite

▶ Exercice 18
Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

▶ Exercice 19
On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

▶ Exercice 20
On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+6t \\ z = -3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

▸ Exercice 21

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

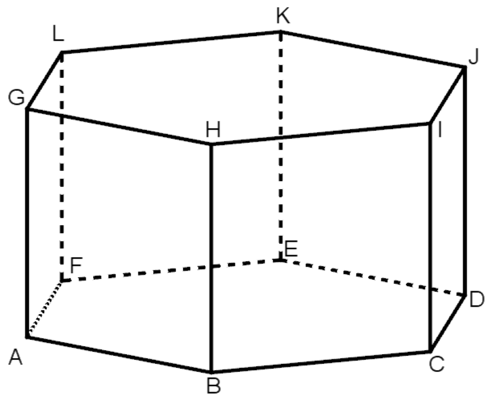
$$(d_1) : \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 11 - 3t \\ z = 11 - 2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = -2 + 5t' \end{cases} ,t' \in \mathbb{R}$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

5 Exercices de synthèse

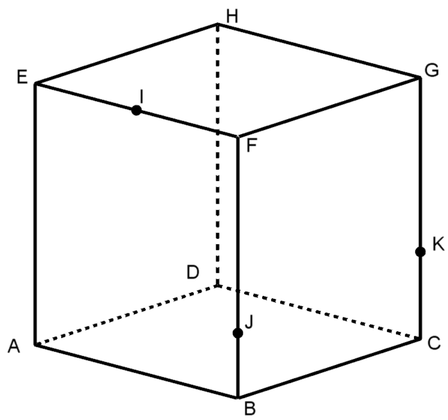
▸ Exercice 22

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEFGH$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



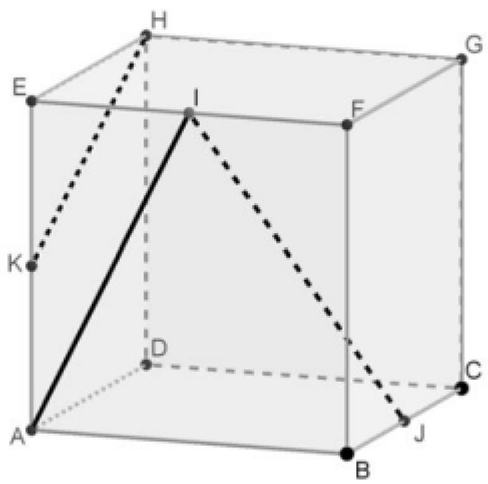
▸ Exercice 23

On se place dans un cube $ABCDEFGH$. On considère le point I, milieu de $[EF]$, le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$. L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$



1. Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection
2. A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant la construction, l'intersection des plans (ABC) et (IJK)
3. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9}; 1; 1\right)$
   (a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   (b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   (c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.
   (d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

► Exercice 24 — Spécialité Maths – Amérique du Nord 2021.
On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

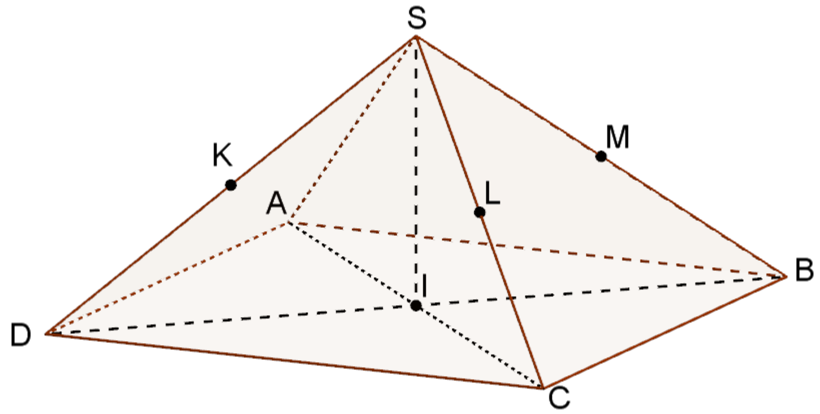
2. Donner les coordonnées des points I et J.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques ci-dessous.

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

► Exercice 25 — Spécialité Maths – Métropole 2021.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré $ABCD$.

On suppose que $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé $(I,\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0,0,0),\ A(-1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(1,0,0),\ D(0,-1,0),\ S(0,0,1)$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont...

   a. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont...

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est

   a. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=0 \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

   c. $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$