Limites de suite

1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

1.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 1.1 — Théorème de comparaison 1. : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

R Il n'y a rien de surprenant ici, si l'on fait preuve d'un brin de logique. Si une suite est plus grande qu'une suite qui devient plus grande que n'importe quel réel, alors elle devient elle-même plus grande que n'importe quel réel.

Démonstration 1.2 : Traduisons le fait qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$: il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, $u_n \leqslant v_n$.

Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout $n > N'$, $u_n \geqslant A$.
Ainsi, si $n > N'$ et $n > N$, on a que $v_n \geqslant u_n \geqslant A$, c'est-à-dire $v_n \geqslant A$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

■ **Exemple 1 :** Pour tout n, on pose $v_n = n + \cos(n)$.

On sait que, pour tout n, $\cos(n) \geqslant -1$. Ainsi, pour tout n, $v_n \geqslant n - 1$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$. Les termes de la suite (v_n) sont plus grands que ceux d'une suite qui tend vers $+\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. ■

Théorème 1.3 — Théorème de comparaison 2. : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

R Il s'agit d'une version similaire au premier théorème de comparaison : une suite plus petite qu'une suite qui tend vers $-\infty$ tend également vers $-\infty$.

1.2 Théorème d'encadrement

Théorème 1.4 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si les suites (u_n) et w_n sont convergentes et de même limite, alors la suite (v_n) est également convergente, de même limite que les deux autres.

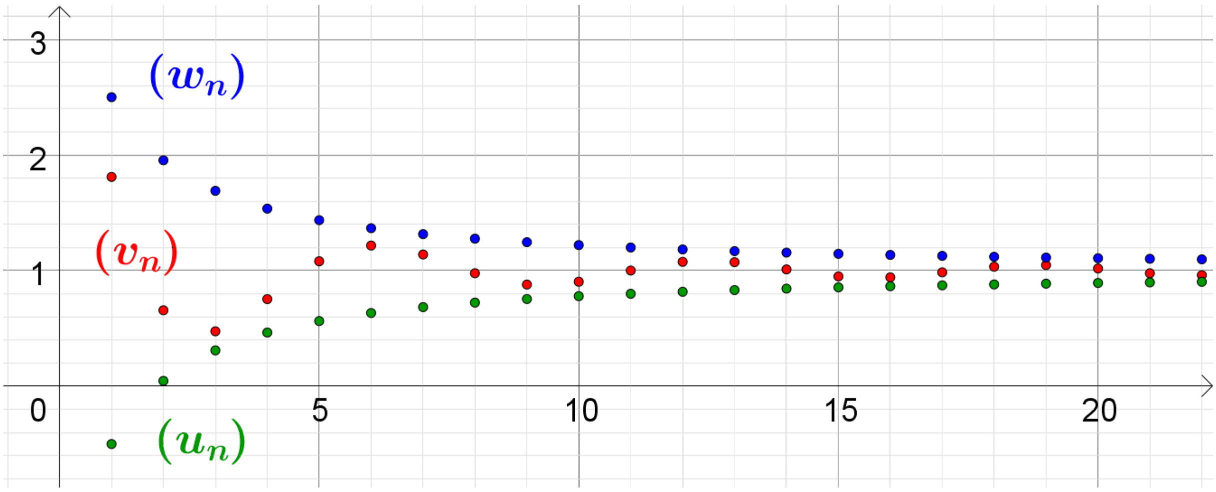
R Il y a deux choses importantes dans ce théorème : d'une part, la suite (v_n) admet une limite – ce qui fait avant tout du théorème d'encadrement un théorème d'existence de limite. D'autre part, cette limite vaut l.

Démonstration 1.5 : Notons N l'entier à partir duquel, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Notons l la limite commune des suites (u_n) et (w_n). Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, il existe un entier N_u à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon\,;\, l + \varepsilon[$, c'est-à-dire
$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant 1 + \varepsilon$$
- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, il existe un entier N_w à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle $]l - \varepsilon\,;\, l + \varepsilon[$, c'est-à-dire
$$l - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant 1 + \varepsilon$$
- Notons $N_v = max(N, N_u, N_w)$. Pour tout $n \geqslant N_v$, on a alors
$$l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant 1 + \varepsilon$$
En particulier, $v_n \in]l - \varepsilon\,;\, l + \varepsilon[$.

Finalement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$ □

Illustration : Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la limite de la suite (v_n).



R Ce théorème est également appelé "théorème des gendarmes". Les suites (w_n) et (u_n) jouent ici le rôle des gendarmes qui encerclent leur cible, la suite (v_n). Peu à peu, les gendarmes se dirigent vers la prison. La suite (v_n), encerclée, n'a d'autre choix que de les suivre.

D'autres noms plus ou moins évocateurs sont donnés à ce théorème : théorème des carabiniers ou théorème du sandwich par exemple.

■ **Exemple 2 :** Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 3 + \dfrac{\cos(n)}{n}$.

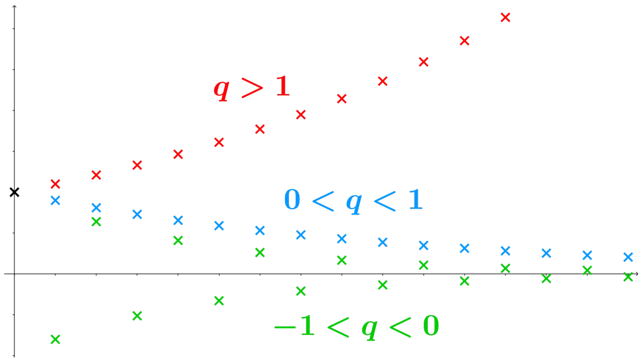
On sait que, pour tout n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, pour tout n, $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$. ■

2 Suites géométriques

Propriété 1 : Soit q un réel
- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = u_0$
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Illustration : L'allure des représentations graphiques des suites (q^n), selon la valeur de q.



Démonstration 2.1 : Il convient d'étudier plusieurs cas

Cas $q > 1$. Dans ce cas, il existe un réel a strictement positif tel que $q = 1 + a$. Ainsi, pour tout entier n, $q^n = (1+a)^n$. Or, d'après l'inégalité de Bernoulli, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Cas $-1 < q < 1$.
- Si $q = 0$, le résultat est immédiat : la suite est constante égale à 0 à partir du rang 1.
- Si $0 < q < 1$,notons $p = \dfrac{1}{q}$. On a alors $p > 1$ et $q^n = \dfrac{1}{p^n}$. Ainsi, d'après le point précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n = +\infty$ et, en prenant l'inverse, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier n, $0 < |q| < 1$. Pour tout entier n, on a alors $-|q|^n < q^n < |q|^n$. Or, d'après le cas précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-|q|^n) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a également $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Cas $q \leqslant -1$.
Dans ce cas, $q^2 \geqslant 1$. Soit k un entier relatif.
- D'une part, $q^{2k} = (q^2)^k$. Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} q^{2k} = +\infty$.
- D'autre part,$q^{2k+1} = q \times (q^2)^k$, qui est le produit d'un nombre négatif et du terme d'une suite qui tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} q^{2k+1} = -\infty$
- Les termes de rangs pairs tendent vers $+\infty$ et les termes de rangs impairs tendent vers $-\infty$: la suite (q^n) ne peut admettre de limite.

□

■ **Exemple 3 :** On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$. Pour tout entier n, $u_n = -2 \times 4^n$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$. Ainsi, en faisant la limite du produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

■ **Exemple 4 :** Soit q un réel tel que $-1 < q < 1$. Pour tout réel n, on note $u_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

On sait que, pour tout n, $u_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Or, puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1 - q}$. ■

3 Convergence des suites monotones

Théorème 3.1 — Convergence des suites monotones. : Soit (u_n) une suite croissante.

- Si la suite (u_n) est majorée par un réel L, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant L$
- Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} = +\infty$.

Démonstration 3.2 : (Second point uniquement) Supposons que la suite (u_n) ne soit pas majorée. Alors, pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$. Or, puisque la suite est croissante, ceci implique que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$.
On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont supérieurs à A, pour n'importe quel réel A. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. □

■ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier n, $u_n \leqslant 5$. On admettra ces deux points pour la suite de l'exemple

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente : on note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. Puisque la suite (u_n) est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}u_n + 4 \right)$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}u_n + 4 \right) = \dfrac{1}{5}l + 4$. Ainsi, l est solution de l'équation $l = \dfrac{1}{5}\,l + 4$. On a donc $l = 5$. ■

R Il est important de montrer que la suite converge avant de passer à la limite. En effet, prenons la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 3$. D'après le même raisonnement, si (v_n) admet pour limite l, alors $l = 2l + 3$, soit $l = -3$... ce qui est absurde : on voit facilement que pour tout entier n, $v_n > 0$. On a en fait $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$!

Théorème 3.3 — Convergence des suites monotones. : Soit (u_n) une suite décroissante.
- Si la suite (u_n) est minorée par un réel l, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant l$
- Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim_{n\to+\infty} = -\infty$.

Démonstration 3.4 : Il suffit de remarquer que si la suite (u_n) est décroissante, alors la suite $(-u_n)$ est croissante. On se retrouve alors dans le cas précédent. □

4 Algorithme de seuil

Lorsqu'une suite est strictement monotone, il est courant de rechercher la valeur à partir de laquelle elle dépassera un certain seuil. Il est possible de résoudre un tel problème à l'aide d'une résolution d'équation ou d'un algorithme.

■ **Exemple 6 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 1$.

On peut montrer par récurrence que cette suite est strictement décroissante et que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$. La suite (u_n) est donc convergente.

Notons l sa limite. Par opération sur les limites, on a alors $l = \dfrac{l}{2} + 1$ soit $\dfrac{l}{2} = 1$ et $l = 2$.

D'après la définition de la limite, pour tout ε, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on a $u_n \in]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$. La suite (u_n) étant ici décroissante, il suffit de trouver le premier rang n pour lequel $u_n \leqslant 2+\varepsilon$: les termes suivants seront forcément compris entre 2, qui est la limite, et $2+\varepsilon$, puisque la suite est décroissante.

L'algorithme fonctionne ainsi
- Si la valeur actuelle de u_n est inférieure à $2+\varepsilon$, alors on s'arrête ici et on renvoie la valeur du rang n.
- Sinon, on calcule la valeur suivante et on recommence tant que la condition $u_n \leqslant 2+\varepsilon$ n'est pas respectée.

Pseudo-algorithme

Variable d'entrée : ε
$U = 9$
$N = 0$
Tant que $U > 2+\varepsilon$
    $U = U/2+1$
    $N = N+1$
Fin Tant que
Renvoyer N

Programme Python

```python
def seuil(epsilon):
    u=9
    n=0
    while u>2+epsilon:
        u=u/2+1
        n=n+1
    return n
```

La valeur de n est stockée dans la variable N et celle de u_n est stockée dans la variable N. A chaque étape, le terme suivant de la suite est calculé : N est augmenté de 1 et on applique la relation de récurrence à u_n. Le programme renvoie alors la première valeur de n telle que u_n n'est pas strictement supérieur à $2+\varepsilon$. ■