Exercices : Dérivation

1 Rappels sur la dérivation

► **Exercice 1 :** Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$

$f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$

$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$

$f_8 : x \mapsto \dfrac{x + e^3}{e^x}$

► **Exercice 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

► **Exercice 3 :** Pour tout réel $x \neq -11$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles

$$f'(x) = \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

► **Exercice 4 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

► **Exercice 5 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

► **Exercice 6 :** A l'aide d'une étude de la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 2$$

► **Exercice 7 :** A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$

2 Dérivée seconde

▶ **Exercice 8 :** Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde

$f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$, sur $]-\infty; 0[$

$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$, sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x}$, sur $]-\infty; 0[$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$, sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, sur $]0; +\infty[$

▶ **Exercice 9 :** On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variations de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▶ **Exercice 10 :** Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Justifier que (fg) est deux fois dérivable sur I et exprimer $(fg)''$ en fonction de f, g et de leurs dérivées.

▶ **Exercice 11 :** Soit a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (ax + b)e^x$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.
2. Montrer que pour tout réel x, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$

▶ **Exercice 12 :** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et n un entier naturel. Lorsqu'il est possible de dériver n fois la fonction f sur I, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois. On a alors $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$...

1. On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est n fois dérivable et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$
2. On considère la fonction $g : x \mapsto xe^{-x}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, g est n fois dérivable et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n)e^x$

3 Composition de fonctions

▶ **Exercice 13 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$

1. Donner une expression de $(f \circ g)(x)$ pour tout réel x.
2. Donner une expression de $(g \circ f)(x)$ pour tout réel x.
3. Donner une expression de $(h \circ g)(x)$ pour tout réel x.
4. Donner une expression de $(f \circ g \circ h)(x)$ pour tout réel x.

▶ **Exercice 14 :** Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de $\mathbb{R}$
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{b}{x-a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

▶ **Exercice 15 :** Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$f_1 : x \mapsto (3x+2)^2$, sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto (6x^2+3x+4)^3$, sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, sur $]0; +\infty[$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x+7}$,sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{(3x+6)^2}$, sur $]-2; +\infty[$

$f_6 : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, sur $]-\infty; 0[$

▶ **Exercice 16 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

▶ **Exercice 17 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

▶ **Exercice 18 :** Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}-2x}$ sur $[0; +\infty[$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

▶ **Exercice 19 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On note D le domaine de définition de f et D' son domaine de dérivabilité.

1. Déterminer D et D'.
2. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.
3. Pour tout réel $x \in D$, on pose $g(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur D' et calculer $g'(x)$ pour tout x dans D'.
   (b) En déduire le sens de variations de g.
   (c) Tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 20 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► **Exercice 21 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-3}{2}\right)^2$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► **Exercice 22 :** Dans chacun des cas suivants, donner une expression de la dérivée seconde des fonctions sur l'intervalle donnée.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$, sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto (3x^2+8)^3$, sur $\mathbb{R}$.

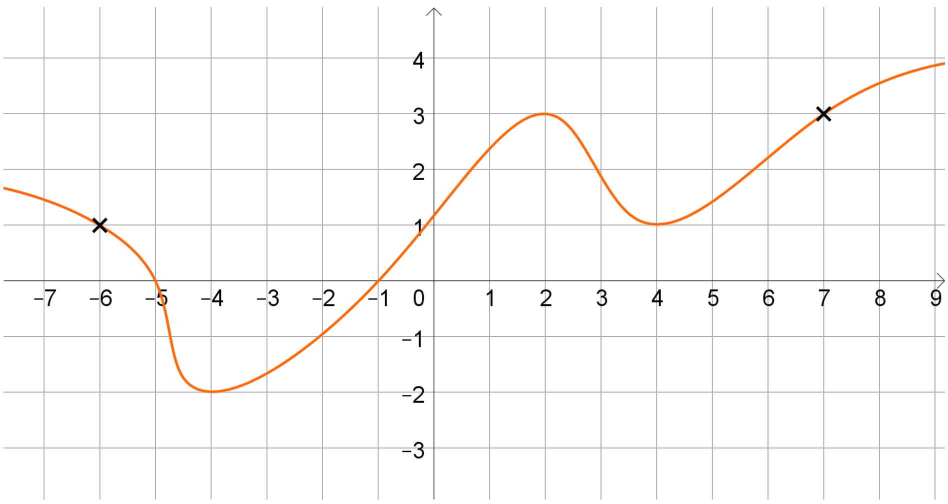
$f_3 : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x+4}$, sur $]-\infty;-2[$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$, sur $\mathbb{R}$.

$f_5 : x \mapsto e^{1/x}$, sur $]0;+\infty[$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{e^x - x}$

► **Exercice 23 :** On considère une fonction f deux fois dérivable. On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



On sait par ailleurs que $f(-6) = -1$, $f(-5,5) = 0$ et $f(-1) = 2$. Construire le tableau de signes de f'' et f sur l'intervalle $[-6;7]$