Limites de suite

1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ **Exercice 1 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = ((-1)^n - 4)n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -3n^2$
2. En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

▶ **Exercice 2 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n^2+1}$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$ et en déduire la limite de u_n en $+\infty$.

▶ **Exercice 3 :** A l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

$u_n = n + 3 \times (-1)^n$

$u_n = n(\sin(n) - 3)$

$u_n = n + \dfrac{\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$

$u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$

$u_n = n^2 + \dfrac{1}{n+2}$

$u_n = (2 + (-1)^n)n$

▶ **Exercice 4 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f' puis de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x - x^2 > 0$
4. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{e^n}{n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

▶ **Exercice 5 :** A l'aide d'un encadrement par deux suites convergentes, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n^3}$ pour $n > 0$
- $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$

▶ **Exercice 6 :** Dans chacun des cas suivants, en utilisant un encadrement, une minoration ou une majoration par d'autres suites de limites connues, donner la limite de la suite (u_n), définie pour tout entier naturel non nul n.

$u_n = \dfrac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$

$u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)}{(-1)^n \times n}$

$u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$

$u_n = n^2 - 2\cos(n) + 3\sin(5n+1)$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} - n^3$

$u_n = \dfrac{n^2+2\cos(n)-5\sin(n)}{3n^2}$

▶ **Exercice 7 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n + 2 \times (-1)^n}{3n + 4 \times (-1)^{n+1}}$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n)

▶ **Exercice 8 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3
2. Parmi les termes de cette somme, le quel est le plus petit ? Lequel est le plus grand.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $\dfrac{n^2}{n^2+1} \geqslant u_n \geqslant \dfrac{n^2}{n^2+n}$
4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.

2 Suites géométriques

▶ **Exercice 9 :** Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_n = 42$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \pi - 3$ et de premier terme $u_0 = -1235$

$u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$	$u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	$u_n = -2 \times 4^n$
$u_n = 3 + 40 \times \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n$	$u_n = 3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$	$u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$
$u_n = 2^n\, 6^{-n}$	$u_n = 3^n - 2^n$	$u_n = 2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}$
$u_n = 2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	$u_n = \dfrac{1-2^n}{1-\dfrac{1}{3^n}}$	$u_n = \dfrac{n^n}{18^n}$

▶ **Exercice 10 :** Soit n un entier naturel. On rappelle que pour tout réel q différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

A l'aide de cette égalité, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$
3. $u_n = 8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{8}{4^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

▶ **Exercice 11 :** Soit a et b deux réels positifs. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n - b^n$. On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

3 Convergence des suites monotones

▶ **Exercice 12 :** On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$
2. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

▶ **Exercice 13 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 14$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $\sqrt{l+2} = l$. Déterminer la valeur de la limite l.

▶ **Exercice 14 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$
3. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne demande pas sa limite.

▶ **Exercice 15 :** Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.
2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la convergence de (u_n) ?
5. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $f(l) = l$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Cette méthode servant à estimer la racine carrée d'un nombre strictement positif se nomme la "Méthode de Héron" et est notamment utilisée dans les calculatrices.

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 16 — Suite arithmético-géométrique : découverte guidée. :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10$$

Partie A : Première approche

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. A l'aide d'un tableur, d'un algorithme ou d'une calculatrice, calculer les premiers termes de cette suite. Quelle semble être sa limite ?
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 40$
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier et déterminer sa limite
6. Recopier et compléter le programme ci-dessous, écrit en Python, pour qu'il donne la premier entier n à partir duquel $u_n \leqslant 42$.

```python
def seuil():
    U = ...
    N = ...
    while U ...
        U = ...
        N = ...
    return ...
```

Partie B : Déterminer la limite

1. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 40$. Soit donc n un entier naturel.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}
   (b) Rappeler la relation qui lie u_{n+1} et u_n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   (d) A l'aide des questions précédentes, montrer que $v_{n+1} = 0.75v_n$
2. (v_n) est donc une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Que vaut v_0 ?
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
4. Montrer alors que pour tout entier naturel n, $u_n = 40 + 60 \times 0.75^n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

▶ **Exercice 17 — Suite arithmético-géométrique : moins guidé.... :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6$$

Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 3.6$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera sa raison et son premier terme v_0.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

▶ **Exercice 18 : Bac S Polynésie 2013**

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$
2. On admet que pour tout entier naturel $u_n < 1$
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 1}$
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On considère le programme suivant, écrit en Python

```python
def seuil():
    U = 0.5
    N = 0
    while U < 0.999:
        U = 3*U/(1+2*U)
        N = N + 1
    return N
```

   (a) Après exécution, le programme renvoie la valeur 7. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   (b) Que se passe-t-il si l'on remplace la valeur 0.999 par 1.001 et que l'on exécute le programme ?

▶ **Exercice 19 — Suites arithmético-géométriques : cas général. :** Soit a et b deux réels. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Dans cette question, on suppose que $a = 1$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.
2. On suppose désormais que $a \neq 1$. On note r la solution de l'équation $x = ax+b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Exprimer r en fonction de a et b.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - r$.
      i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison.
      ii. Exprimer u_n en fonction de n
      iii. Déterminer la limite de la suite (u_n) selon a, b et u_0.

► **Exercice 20 : Bac ES Amérique du Nord 2019**

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le premier jour du mois et se termine le dernier jour du même mois
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n), où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 420$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.On précisera le premier terme v_0 et la raison.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.
   On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← 280
Tant que ..........
      N ← N + 1
      U ← ..........
Fin Tant que
```

   (a) Recopier et compléter l'algorithme
   (b) Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

▶ Exercice 21 : Bac S Métropole 2019, exercice 2, partie B

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

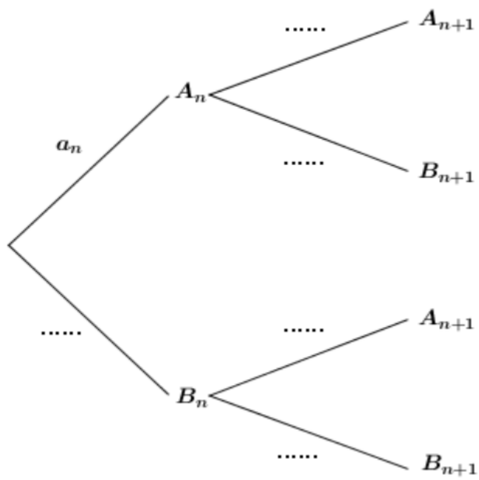
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

- A_n : la n-ième partie est de type A
- B_n : la n-ième partie est de type B

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :



2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

3. Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. Étude du cas général : Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0; 1]$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (a_n). Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
5. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre publicité insérée en début des parties de type B. Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?