Limites de fonction

Dans tout ce chapitre, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur D.

1 Limite en l'infini

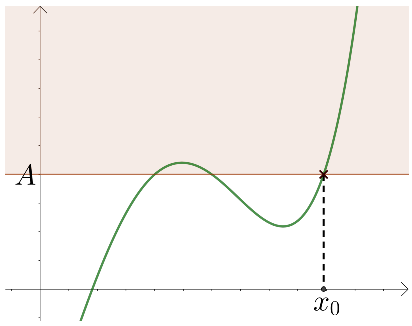
1.1 Limite infinie en l'infini

Définition 1 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a; +\infty[\subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$,si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

R Cette définition est très similaire à celle rencontrée pour les limites de suites : pour n'importe quel réel A, aussi grand soit-il, à partir d'une certaine valeur du réel x, $f(x)$ est plus grand que ce réel A.

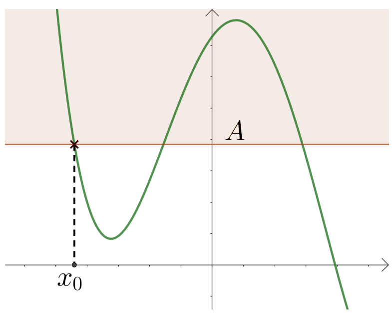
■ **Exemple 1 :** On représente ici une fonction f. Pour n'importe quel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 à partir duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ■



Définition 2 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $]-\infty; a] \subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

■ **Exemple 2 :** On représente ici une fonction f. Pour n'importe quel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 en-dessous duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. ■



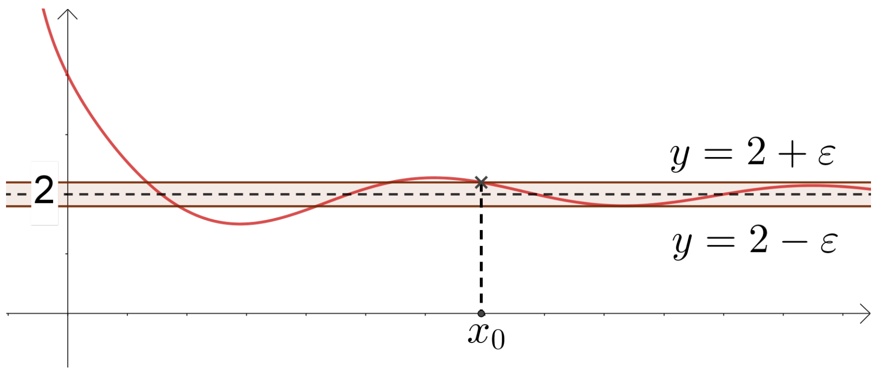
R Il s'agit de la principale différence avec les suites : pour les suites, l'indice n ne pouvait que tendre vers $+\infty$. Dans notre, cas, le réel x peut aller vers $+\infty$ mais aussi $-\infty$ et d'autres valeurs réelles.

1.2 Limite finie en l'infini

Définition 3 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a; +\infty[\subset D$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que f a pour limite l en $+\infty$ - ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ - si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.
- On dit que f a pour limite l en $-\infty$ - ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ - si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

■ **Exemple 3 :** Une fonction f est représentée ci-dessous. Pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un x_0 à partir duquel on a toujours $f(x) \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$



■

Définition 4 : On se place dans un repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$

1.3 Limites usuelles

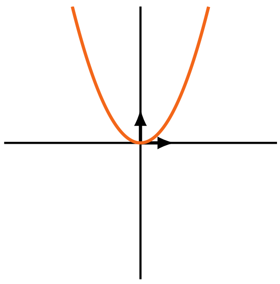
Propriété 1 : Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$. Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
- Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ par valeurs supérieures.
- Si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ par valeurs inférieures.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

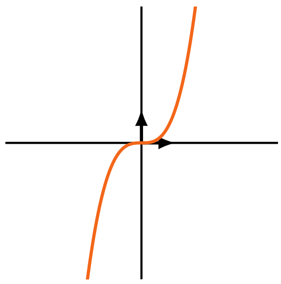
R Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions.

Rappel des courbes représentatives

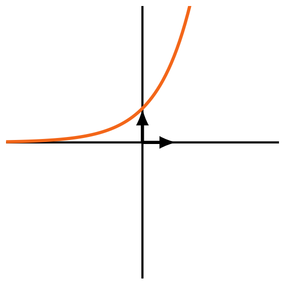
$x \mapsto x^n$, **n pair**



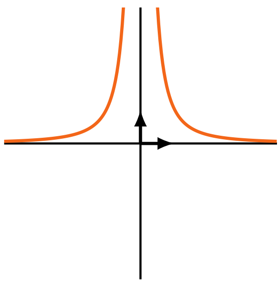
$x \mapsto x^n$, **n impair**



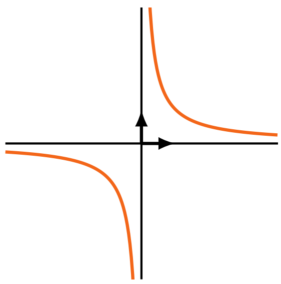
$x \mapsto e^x$



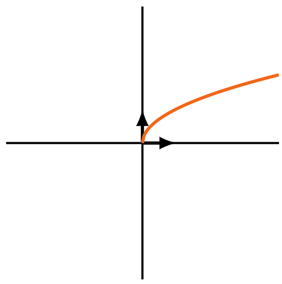
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n pair**



$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n impair**



$x \mapsto \sqrt{x}$



2 Limite en un point

2.1 Limite finie en un point

Définition 5 : L'essentiel : Soit $a \in \mathbb{D}$ et l un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a - \delta; a + \delta[$, alors $f(x) \in]l - \varepsilon : l + \varepsilon[$.

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en l contient toutes les valeurs de x lorsque x est suffisamment proche de a.

Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

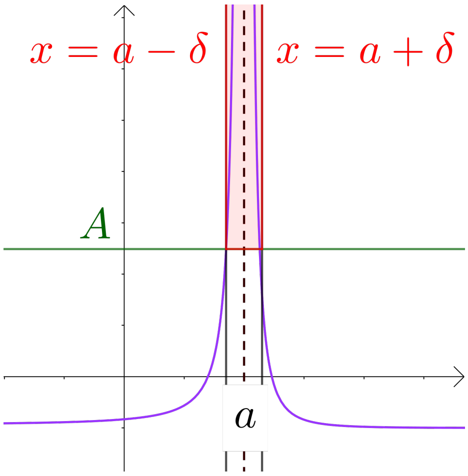
R Certaines fonctions admettent une limite différente si l'on se rapproche de a par valeurs supérieurs ou par valeurs inférieures. Nous aurons l'occasion d'en discuter plus amplement dans le chapitre suivant.

2.2 Limite infinie en un point

Définition 6 : L'essentiel : Soit $a \in \mathbb{D}$ ou sur un bord de D.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a - \delta; a + \delta[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a - \delta; a + \delta[\cap D$, alors $f(x) < A$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

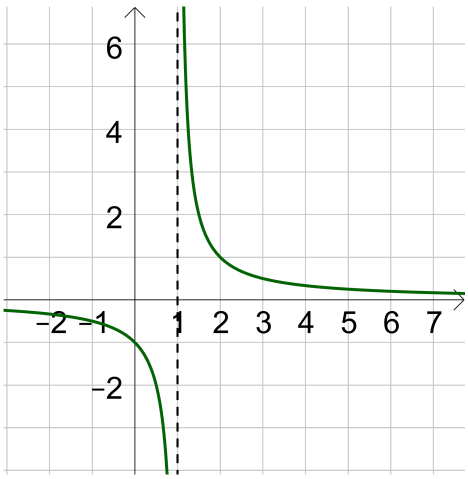
■ **Exemple 4 :** On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f.



Pour n'importe quelle valeur du réel A, on peut trouver un intervalle centré sur a tel que toute valeur de $f(x)$ est supérieur à A pour n'importe quel x pris dans cet intervalle. Ce raisonnement vaut peu importe la valeur du réel A : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ■

R Encore une fois, certaines fonctions admettent une limite différente si l'on se rapproche de a par valeurs supérieurs ou inférieures.

■ **Exemple 5 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Il semblerait que, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs supérieures, la limite soit $+\infty$, ce que l'on notera $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. En revanche, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs inférieures, la limite semble être $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. ■

Définition 7 : Lorsque la limite d'une fonction f est infinie en un point a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

■ **Exemple 6 :** Dans l'exemple précédent, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f. ■

3 Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites sont similaires à celles connues sur les suites. Dans cette partie, f et g sont deux fonctions définies au voisinages de a, a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. l_1 et l_2 sont deux réels.

3.1 Limite de la somme

Propriété 2 — Limite de la somme. : .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	l_1+l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

3.2 Limite du produit

Propriété 3 — Limite du produit. : .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	$l_1>0$	$l_1<0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\,g(x))$	$l_1\,l_2$	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe inchangé)	$-\infty$ ou $+\infty$ (signe changé)	$+\infty$ ou $-\infty$ (signe inchangé)	$-\infty$ ou $+\infty$ (signe changé)

3.3 Limite du quotient

Propriété 4 — Limite du quotient. : .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	l_1	$l_1\neq 0$	$l_1\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l_2\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures	0 par valeurs inférieures	l_2
$\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	$+\infty$ si $l_1>0$, $-\infty$ sinon	$-\infty$ si $l_1>0$, $+\infty$ sinon	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes)

3.4 Composition de limites

Propriété 5 : Dans cette partie, a est un réel ou vaut $\pm\infty$. Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=l$ avec $l\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{u(x)}=\sqrt{l}$
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=l$, alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)}=e^l$
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{u(x)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)}=+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} e^{u(x)}=0$

R Ces règles peuvent vous sembler "logiques". Elles ne le sont pas tout à fait et font intervenir une notion que nous verrons d'ici deux chapitres.

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-2x^2-3x-5}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^2-3x-5) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x^2-3x-5} = 0$ ■

■ **Exemple 8 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$, définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty$.

Pour calculer la limite en 1^+ :

- $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1) = 0^+$, ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.
- Par somme de limite, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

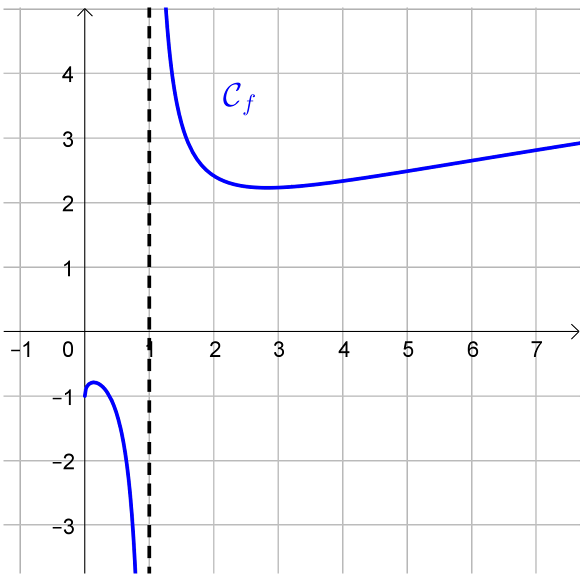
Pour calculer la limite en 1^- :

- $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1^-} (x-1) = 0^-$, ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.
- Par somme de limite, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

Pour calculer la limite en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$, ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = 0$.
- Par somme de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Représenter la courbe de la fonction f dans un graphique (par exemple, dans un logiciel de géométrie ou sur une calculatrice) permet de confirmer ou d'infirmer les calculs.



■

R Comme pour les suites, certaines formes sont indéterminées et demanderont plus de travail (factorisation, forme conjuguée, croissances comparées vu ultérieurement)

■ **Exemple 9 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$.

Pour tout réel $x \neq 2$ et $x \neq 0$, on a alors $f(x) = \dfrac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{4}{x}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{4}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{x}\right) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$. De la même manière, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ ■

4 Comparaison de limite

Propriété 6 : Soit a un réel. Soit f et g deux fonctions définies sur $I =]a;+\infty[$

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

■ **Exemple 10 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2+\cos(x))e^x$. Or, pour tout réel x, $\cos(x) \geqslant -1$, ce qui implique que $2+\cos(x) \geqslant 1$ d'où $f(x) \geqslant e^x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ■

■ **Exemple 11 :** On souhaite déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. On construit alors le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On s'aperçoit alors que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$, et donc que $e^x \geqslant 1+x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. ■

R Le même théorème peut s'appliquer pour déterminer une limite en $-\infty$.

Propriété 7 : Soit a un réel. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $I =]a;+\infty[$.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant$ et si f et h admettent une même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$.

■ **Exemple 12 :** Pour tout réel non nul x, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. On a alors $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. ■

5 Croissances comparées

Propriété 8 : Soit n un entier naturel.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^x = 0$

L'exponentielle "l'emporte" sur la puissance.

■ **Exemple 13 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x - x}{e^x}$. On a alors $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} = 1 - \dfrac{x}{e^x}$. Or, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ■

6 Approfondissement : Asymptotes obliques

Définition 8 : Soit a un réel et f une fonction définie sur $]a; +\infty[$. Soit m et p des réels. On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0$.

■ **Exemple 14 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x - 3}{2x - 2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = \frac{x^2 + 3x - 3}{2x - 2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x + 2\right)(2x - 2)}{2x - 2} = \frac{x^2 + 3x - 3 - x^2 - 4x + x + 4}{2x - 2} = \frac{1}{2x - 2}$$

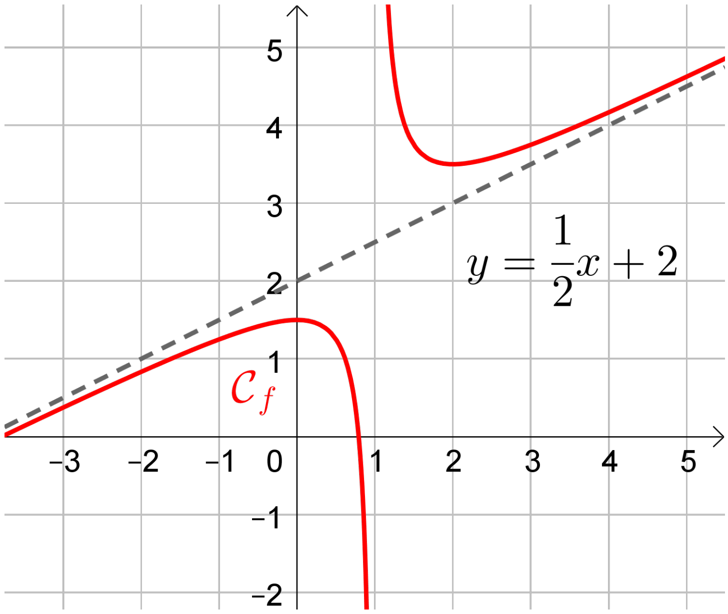
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 2\right)\right) = 0$. La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 2\right)\right) = 0$. La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ est également asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Il est également possible, en étudiant le signe de $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 2\right)$, de déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote. Ainsi,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x - 2} \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$$

La courbe de f est en-dessous de son asymptote en $-\infty$ et est au-dessus en $+\infty$.



$y = \frac{1}{2}x + 2$
$\mathcal{C}_f$

■