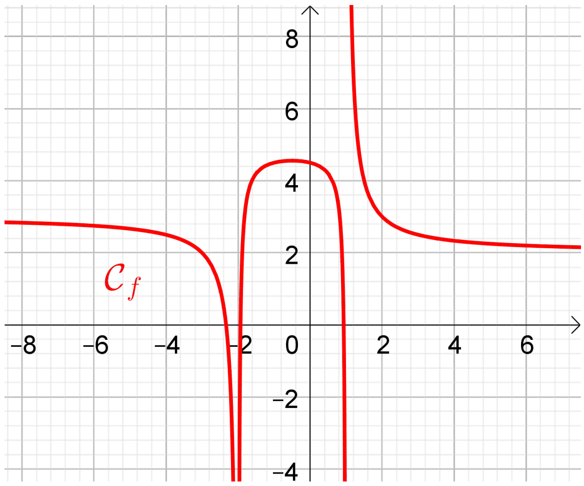
Exercices : Limites de fonctions

1 Notion de limite

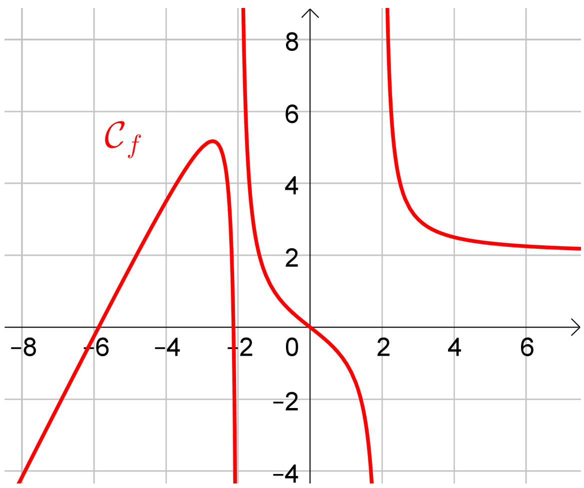
▶ **Exercice 1 :** On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.



A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

▶ **Exercice 2 :** On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$?

▶ **Exercice 3 :** On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7		$+\infty$
f	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

1. A l'aide de ce tableau, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathcal{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

2 Opérations sur les limites

▶ **Exercice 4 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

- $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
- $f : x \mapsto x^3 - x^2$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ en $a = +\infty$ et en $a = -\infty$
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}$ en $a = 0^+$ puis en $a = +\infty$.
- $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x}$ et $a = 1^+$ puis en $a = 1^-$
- $f : x \mapsto (1-2x)e^x$ en $a = +\infty$
- $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) - 1}$ en $a = 0^+$ puis en $a = 0^-$
- $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x}$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$
- $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$
- $f : x \mapsto \dfrac{(x+5)^2 - 25}{x}$ en $a = 0$
- $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{x^2-25}$ en $a = +\infty$, en $a = -\infty$, en $a = 5^+$, en $a = 5^-$, en $a = (-5)^+$ et en $a = (-5)^-$.

▶ **Exercice 5 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x+1}$

1. Donner le domaine de définition de f
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

▶ **Exercice 6 :** Une autre forme indéterminée...

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x,
$$2x^3 + 6x^2 - 9x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 9x + 1}{3x^2 - x - 2}$

▶ **Exercice 7 :** On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Déterminer les limites suivantes

1. Ecrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto e^x$ entre 0 et h.
2. Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

3 Théorème de comparaison

▶ **Exercice 8 :** A l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une fonction dont la limite est connue, déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + \sin(x))$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left((\cos(4x) - 3)x^3\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((\cos(4x) - 3)x^3\right)$

▶ **Exercice 9 :** Donner deux réels a et b tels que, pour tous réels $x \leqslant 0$, $a \leqslant e^x \leqslant b$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x}$

▶ **Exercice 10 :** A l'aide d'un encadrement par des fonctions dont la limite est connue, déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\sin(x) + 2\cos(x)}{x^3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 2\sin(x)}{x}\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x + 2\sin(x)}{x}\right)$.

▶ **Exercice 11 :** Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x + \sin(x) + 3}$ en $a = +\infty$
2. $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + \sin(4x)$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + \sin(x)}{2x}$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$

4 Croissances comparées

▶ **Exercice 12 :** Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-3x^2+5x-1)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x-3x^2+5x-1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2e^{-x}-x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2e^{-x}-x)$

5 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 13 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

▶ **Exercice 14 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x+2}$$

1. Étudier la fonction f : variations, signe, limites
2. Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$
   (a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = -\dfrac{6}{2x+2}$
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. On dit que la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
3. Dans un même repère orthonormé, tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$ et la courbe représentative de la fonction f.