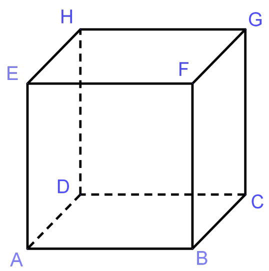
Exercices : Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire

► Exercice 1
On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

► Exercice 2
On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$
$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

► Exercice 3
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

► Exercice 4
On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

► Exercice 5
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

► Exercice 6
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2. $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3. $||\vec{u}|| = \frac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \frac{2}{5}$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = \frac{4}{3}$
4. $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

► Exercice 7
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||\vec{u - v}|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Base orthonormée

▶ Exercice 8

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

▶ Exercice 9

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;1;2)$, $C(8;2;x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

▶ Exercice 10

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3;4;2)$, $B(5;2;2x)$, $C(3;10;x)$. Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

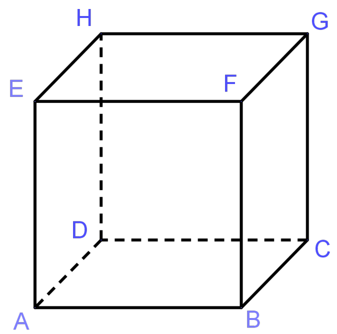
▶ Exercice 11

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

▶ Exercice 12

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4. Quelle est la nature du triangle IJK ?

3 Orthogonalité

► Exercice 13

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;2;3)$ et $C(3;6;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

► Exercice 14

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

► Exercice 15

On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -5+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

► Exercice 16

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

► Exercice 17

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

► Exercice 18

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

4 Equations cartésiennes de plan

Dans tous les exercices suivants, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé.

▶ Exercice 19

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y-z+1=0$ ainsi que les points $A(2,-3,1)$, $B(0,0,1)$, $C(0,2,5)$ et $D(1,5,3)$.

1. Quels sont les points qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

▶ Exercice 20

Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

▶ Exercice 21

On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(5;3;0)$

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

▶ Exercice 22

Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennces respectives $2x+3y-5z+1=0$ et $4x+6y-10z+3=0$. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles mais non confondus.

▶ Exercice 23

On considère les points $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-3)$ et $C(6;6;1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x-y-z+4=0$. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

▶ Exercice 24

Déterminer, s'il existe, le point d'intersection du plan P d'équation $2x-3y-2z+1=0$ et de la droite (d) de représentation $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

▶ Exercice 25

On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $2x+y-z+3=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1;1;6)$ et $B(2;0;7)$ appartiennent aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$.

5 Projeté orthogonal

► Exercice 26

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(5;1;3)$, le point B de coordonnées $(-2;-2;-2)$ et le plan $\mathcal{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.

On considère le point H de coordonnées $(2;4;1)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathcal{P}$
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathcal{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

► Exercice 27

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE)
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG)
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point G sur le plan (BDE)

► Exercice 28 — Bac 2021 – Amérique du Nord.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ dans un repère orthonormé. Montrer que le point $L(4,0,3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5,3,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

► Exercice 29

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le point $A(3{,}5{,}1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Soit M un point de la droite D, de paramètre t.

1. Montrer que la distance AM vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\sqrt{11x^2-22x+29}$
   (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que f admet un minimum en une valeur x_0 que l'on précisera. Que vaut ce minimum ?
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

6 Exercices de synthèse

► Exercice 30

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+4y-5z+1=0$ ainsi que le point $A(6;8;-9)$

1. Le point A appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

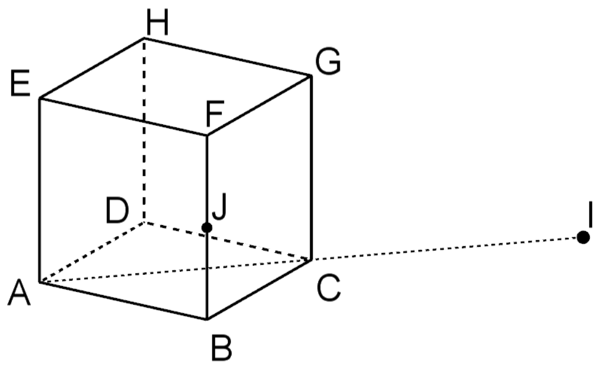
► Exercice 31 — Bac 2021 – Centres étrangers.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants : $A(2;-1;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(0;4;1)$ et $S(0;1;4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC)
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan ABC en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d)
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2;2;3)$
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V=\dfrac{\text{Aire de la base}\ \times\ \text{Hauteur}}{3}$. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. (a) Calculer la longueur SA
   (b) On indique que $SB=\sqrt{17}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré

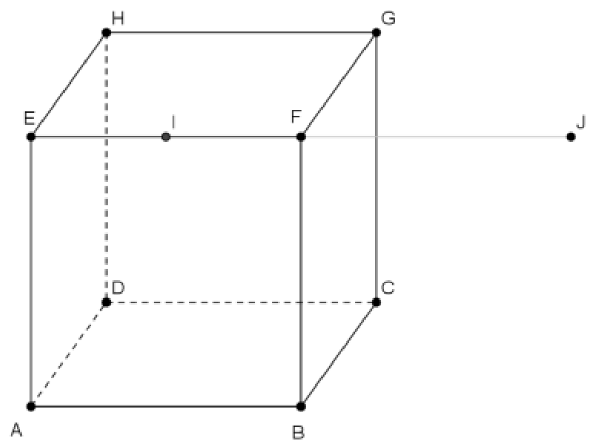
► Exercice 32

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 1. L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère le point I, symétrique du point A par rapport au point C ainsi que le point J, milieu du segment $[BF]$



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD)
3. En déduire une équation cartésienne du plan (IJD)
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
5. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH)
6. Calculer $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}$ ainsi que les longueurs KB et KD
7. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BKD}$

► Exercice 33 — Bac 2021 – sujet zéro.
On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le milieu I de $[EF]$ et J le symétrique de E par rapport à F. Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   (b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$
   (c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   (d) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$. Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

   où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.
   (a) Calculer le volume de la pyramide $FBGI$.
   (b) En déduire l'aire du triangle BGI.

► **Exercice 34**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ et $D(0;0;3)$. Le tétraèdre $ABCD$ est un tétraèdre trirectangle.

1. Montrer que le plan (BCD) admet pour équation cartésienne $6x+3y+2z-6=0$.
2. Donner une équation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (BCD) passant par le point A
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre vaut $\frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de ce tétraèdre. En calculant le volume du tétraèdre $ABCD$ de deux manières différentes, déterminer l'aire du triangle BCD.
5. Montrer que le carré de l'aire du triangle BCD est égale à la somme des carrés des aires des triangles ABC, ABD et ACD.