

Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 1 : Soit a un réel strictement positif. On appelle logarithme népérien de a , noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1.1 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Est-elle unique ?

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, pour tout réel $a \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$. \square

■ **Exemple 1 :** $\ln(1) = 0$. En effet, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$. ■

■ **Exemple 2 :** $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$. ■

Propriété 1 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.
Pour tout réel a , $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 1.2 : Soit a un réel strictement positif. $\ln(a)$ est, par définition, solution de l'équation $e^x = a$. On a donc $e^{\ln(a)} = a$.

Par ailleurs, pour tout réel a , $e^a > 0$. Par définition du logarithme népérien, $\ln(e^a)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, $x = a$ est une solution de cette équation. On a donc $\ln(e^a) = a$. \square

■ **Exemple 3 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

R Attention : il n'existe pas de logarithme népérien de réels négatifs !

■ **Exemple 4 :** On cherche à résoudre l'équation $\ln(x+2) + 3 = 0$. $\ln(x+2)$ n'existe que si $x+2 > 0$, c'est-à-dire $x > -2$. Soit donc $x > -2$.

$$\ln(x+2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = -3 \Leftrightarrow x+2 = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3} - 2$$

Puisque $e^{-3} > 0$, on a alors $e^{-3} - 2 > -2$. L'unique solution de l'équation est donc $e^{-3} - 2$. ■

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : Soit a et b des réels strictement positifs.

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$
- Pour tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$

Démonstration 2.1 : Soit a et b des réels strictement positifs.

- $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$. En appliquant \ln à cette égalité, on a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Puisque $\ln(1) = 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$, et donc $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Puisque pour tout réel $a > 0$, $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, on a

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$$

$$\text{et donc } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$$

- Pour tout entier naturel n , on pose $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n \ln(a)$
 - **Initialisation** : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
 - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n \ln(a) + \ln(a) = (n+1) \ln(a)$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : \mathcal{P} est héréditaire.
 - **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- Par ailleurs, pour tout entier naturel n , $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$. Ainsi, $\ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = 0$. Or, $\ln(a^n) = n \ln(a)$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -n \ln(a)$. □

■ **Exemple 5 :** On souhaite simplifier $\ln(12) + \ln(3) - 2 \ln(6)$.

$$\begin{aligned} \ln(12) + \ln(3) - 2 \ln(6) &= \ln(12 \times 3) - 2 \ln(6) \\ &= \ln(36) - 2 \ln(6) \\ &= \ln(6^2) - 2 \ln(6) \\ &= 2 \ln(6) - 2 \ln(6) = 0 \end{aligned}$$

3 Fonction logarithme népérien

Définition 2 : On appelle fonction logarithme népérien la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

3.1 Limites

Propriété 3 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 3.1 — Au programme : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$. : Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

Ainsi, $x \ln(x) = X e^X$. Or, lorsque x tend vers $-\infty$, $\ln(x)$ tend vers 0. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} X e^X$ qui vaut 0 par croissances comparées. \square

3.2 Dérivabilité

Propriété 4 : La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

R La fonction \ln est donc également continue sur $]0; +\infty[$.

Démonstration 3.2 — Au programme. : On admet que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

- D'une part, on sait que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1$.
- D'autre part, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on sait que $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ et donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ \square

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x \ln(x)$

- Pour tout réel x , on pose $u(x) = e^x$. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = e^x$
- Pour tout réel x , on pose $v(x) = \ln(x)$. v est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

Ainsi, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x > 0$

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = e^x \times \ln(x) + e^x \times \frac{1}{x} = \frac{e^x(x \ln(x) + 1)}{x}$$

■

Propriété 5 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$. alors $\ln(u)$ est dérivable et

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

- **Exemple 7 :** Pour tout réel x , on pose $u(x) = x^2 - 2x + 5$ et $f(x) = \ln(u(x)) = \ln(x^2 - 2x + 5)$
- Il faut vérifier que pour tout réel x , $u(x) > 0$. C'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 > 0$. Ainsi, pour tout réel x , $u(x)$ est du signe du coefficient dominant, 1, c'est-à-dire $u(x) > 0$.
 - Pour tout réel x , on pose alors $u(x) = x^2 - 2x + 5$. u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $u'(x) = 2x - 2$.
 - Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}$$

■

3.3 Etude de la fonction \ln

Propriété 6 : La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Démonstration 3.3 : La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ qui est strictement positif. \ln est donc strictement croissante. □

Propriété 7 : Soit x un réel strictement positif. $\ln(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$

- **Exemple 8 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $1.2^n \geq 10$

Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, $1.2^n \geq 10$ si et seulement si $\ln(1.2^n) \geq \ln(10)$, soit $n \ln(1.2) \geq \ln(10)$. Puisque $1.2 > 1$, alors $\ln(1.2) \geq \ln(1) = 0$. On peut donc diviser par $\ln(1.2)$ qui est strictement positif sans changer le sens de l'inégalité.

On a donc $n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(1.2)} \simeq 12.6$. Le premier entier n tel que $1.2^n \geq 10$ est donc $n = 13$. ■

Propriété 8 : La courbe de la fonction \ln est symétrique à la courbe de la fonction \exp par rapport à la droite d'équation $y = x$.

