Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire de deux vecteurs

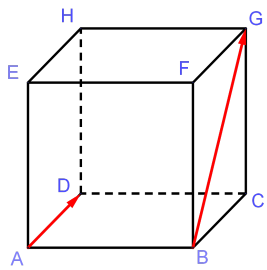
1.1 Définition du produit scalaire

Définition 1 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère des points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. L'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u};_v ecv)$ est l'angle $\widehat{BAC}$, vu dans le plan (ABC).

Définition 2 : Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et qui vaut

- 0 si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ vaut $\vec{0}$
- $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ sinon

■ **Exemple 1 :** Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$.



- D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
- L'angle $\widehat{HAD}$ mesure 45° ou $\dfrac{\pi}{4}$ radians.
- $AD = 1$. Le théorème de Pythagore permet de montrer que $AH = \sqrt{2}$
- Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = AD \times AH \times \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

■

1.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété 1 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k et k' deux réels.

- $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, le produit scalaire est symétrique.
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v} + k'\vec{w}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + k'(\vec{u} \cdot \vec{w})$. Le produit scalaire est bilinéaire.

■ **Exemple 2 :** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + 4\vec{w}) = -3(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4(\vec{u} \cdot \vec{w}) - 6(\vec{v} \cdot \vec{u}) + 8(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

On remplace alors les valeurs par celle de l'énoncé en rappelant que $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

$$(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-3\vec{u} + 4\vec{w}) = -3 \times 4^2 + 4 \times (-1) - 6 \times 3 + 8 \times 5 = -30$$

■

Définition 3 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

1.3 Formules de polarisation

Propriété 2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$

Démonstration 1.1 : On utilise la bilinéarité du produit scalaire.

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}-\vec{v})^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) \\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2\end{aligned}$$

□

Propriété 3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$

Démonstration 1.2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. D'après la propriété précédente, on a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2$$

et

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2.$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans ces deux expressions, on retrouve les deux premiers points. De plus, en soustrayant ces deux égalités, on trouve que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Il suffit de diviser par 4 pour retrouver la dernière égalité. □

■ **Exemple 3 :** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $AB=5$, $BC=7$ et $AC=8$.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2 - AB^2 - AC^2)$$

Or, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, d'où

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(7^2-5^2-8^2) = -20$$

■

2 Base orthonormée

Définition 4 : Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère de l'espace.
- On dit que la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée si
  - $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$
  - $||\vec{i}||=||\vec{j}||=||\vec{k}||=1$
- On dit alors que le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé.

R Une famille orthonormée de trois vecteurs forme forcément une base de l'espace.

■ **Exemple 4 :** Si on considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace. ■

Propriété 4 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

Démonstration 2.1 : Il suffit de revenir à la définition de coordonnées.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$

On développe alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'\vec{i}\cdot\vec{i}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+xz'\vec{i}\cdot\vec{k}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}\cdot\vec{j}+yz'\vec{j}\cdot\vec{k}+zx'\vec{k}\cdot\vec{i}+zy'\vec{k}\cdot\vec{j}+zz'\vec{k}\cdot\vec{k}$$

Or, la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, les seuls produits scalaires non nuls sont $\vec{i}\cdot\vec{i}$, $\vec{j}\cdot\vec{j}$, et $\vec{k}\cdot\vec{k}$ qui valent 1. Ainsi,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

□

■ **Exemple 5 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times 5+(-1)\times 3+2\times -6=15-3-12=0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

Propriété 5 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Alors

$$||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

En particulier, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points de l'espace, alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

■ **Exemple 6 :** On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $A(1;2;5)$ et $B(3;3;3)$.

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

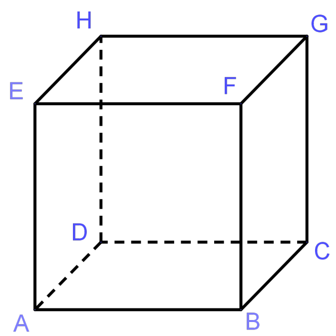
■

3 Orthogonalité

3.1 Droites orthogonales

Définition 5 : Soit (d) et (d') deux droites de l'espace. On dit que (d) et (d') sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites passant par un même point sont perpendiculaires.

■ **Exemple 7 :** On considère un cube $ABCDEFGH$



Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. En effet, la parallèle à (CG) passant par B est la droite (BF) qui est perpendiculaire à la droite (AB). ■

Propriété 6 : Deux droites (d) et (d'), dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

■ **Exemple 8 :** On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques suivantes.

$$(d_1)\,;\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{et} \quad (d_2)\,;\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite (d_2) par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 \times (-3) + 1 \times (-2) + (-1) \times 4 = 6 - 2 - 4 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Les droites (d_1) et (d_2) sont orthogonales. ■

3.2 Droite orthogonale à un plan

Définition 6 : Soit (d) une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit que (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

Propriété 7 : Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = \vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 0$.

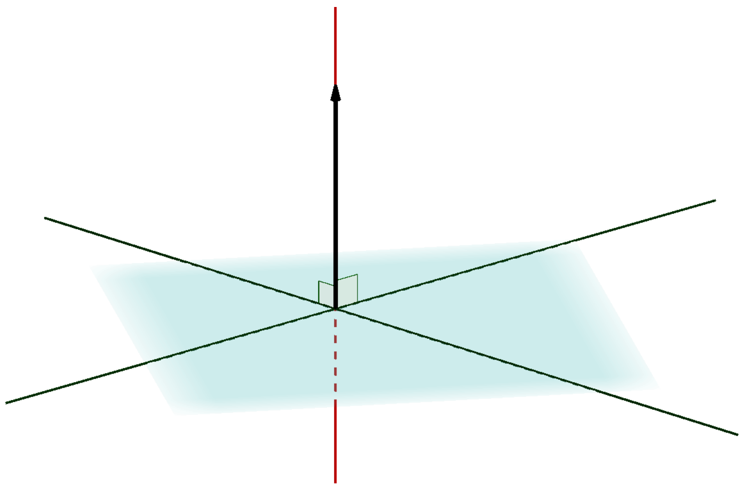
■ **Exemple 9 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. On considère deux points $A(2;5;2)$ et $B(5;8;-1)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. En effet,

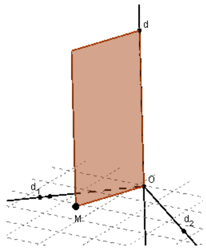
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées
  - $\overrightarrow{AB}\cdot v_1 = 3\times 1 + 3\times 2 + (-3)\times 3 = 0$
  - $\overrightarrow{AB}\cdot v_2 = 3\times 1 + 3\times 0 + (-3)\times 1 = 0$
- Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal aux vecteur $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

■

R Une droite est donc orthogonale à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.



R Ce théorème fort utile est parfois appelé "théorème de la porte". Son nom provient de la menuiserie : il permet de s'assurer que l'axe de rotation d'une porte est perpendiculaire au plancher.



Dans un registre plus pompeux, on l'appelle également le "théorème fondamental de l'orthogonalité".

3.3 Vecteur normal à un plan

Définition 7 : Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur du plan $\mathcal{P}$.

R Pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

■ **Exemple 10 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$-1 est normal au plan $\mathcal{P}$. En effet,

- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 2\times 3 + 0\times 2 + (-1)\times 6 = 0$
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 2\times 1 + 0\times(-3) + (-1)\times 2 = 0$

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ ■

Propriété 8 : Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal au premier est normal au second.

Propriété 9 : Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal du second.

4 Equation cartésienne d'un plan

4.1 Equation cartésienne

Propriété 10 : Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et A un point de l'espace. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan passant par A admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$.

R Il est donc possible de décrire un plan à l'aide d'un point et d'un vecteur normal.

Propriété 11 : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$

Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant

$ax + by + cz + d = 0$ est un plan admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Démonstration 4.1 : Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Le point M appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Puisque le repère que l'on considère est orthonormé,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$$

Ainsi, le point M appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

Réciproquement, a, b, c et d quatre réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On supposera par exemple que $a \neq 0$. On note alors $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

D'une part, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de l'espace vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ n'est pas vide. En effet, le point $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ appartient à cet ensemble.

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace et $A \in \mathcal{E}$. Puisque $A \in \mathcal{E}$ on a alors $ax_A + by_A + cz_A = -d$. Ainsi,

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow ax+by+cz+d = 0 \Leftrightarrow ax+by+cz-ax_a-by_A-cz_A = 0 \Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = 0$$

C'est-à-dire

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc un plan admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal. □

■ **Exemple 11 :** Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 5; 7)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne

$$4(x - 1) - 2(y - 5) + 3(z - 7) = 0$$

c'est-à-dire

$$4x - 2y + 3z - 15 = 0$$

■

R Il est possible de raisonner comme suit : tout plan admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal admet une équation cartésienne de la forme $4x-2y+3z+d=0$ pour un certain réel d. Pour que ce plan passe par le point A, il faut que les coordonnées de A vérifient cette équation. Autrement dit, $4\times 1-2\times 5+3\times 7+d=0$, soit $15+d=0$ et donc $d=-15$.

4.2 Intersection d'une droite et d'un plan

■ **Exemple 12 :** On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+5y-3z+1=0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ Si un point $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et de (d), ses coordonnées vérifient les deux équations à la fois. On a donc

$$M \in P \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \\ 2x+5y-3z+1=0 \end{cases}$$

En remplaçant les valeurs de x, y et z dans la dernière équation, on a donc

$$M \in P \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \\ 2(2-t)+5(5+t)-3(-2-2t)+1=0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$M \in P \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \\ 36+9t=0 \end{cases}$$

Finalement,

$$M \in P \cap (d) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ x = 2-(-4) = 6 \\ y = 5+(-4) = 1 \\ z = -2-2\times(-4) = 6 \end{cases}$$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et (d) est le point $M(6;1;6)$. ■

5 Projeté orthogonal

Définition 8 : Soit A un point de l'espace et (d) une droite de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$. On appelle projeté orthogonal de A sur (d) le point H de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$.
En particulier,
- Si A appartient à la droite (d), ce point est son propre projeté,
- sinon, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (d).

Définition 9 : Soit A un point de l'espace, $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{n}$. En particulier
- Si A appartient au plan $\mathcal{P}$, ce point est son propre projeté
- sinon, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathcal{P}$

Propriété 12 : Soit A un point de l'espace, $\mathcal{P}$ un plan et H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Pour tout point K du plan $\mathcal{P}$, $AK \geqslant AH$: le projeté orthogonal est le point du plan $\mathcal{P}$ qui est le plus proche du point A.

La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est alors égale à la distance AH.

Démonstration 5.1 : Soit K un point du plan $\mathcal{P}$.

$$AK^2 = ||\overrightarrow{AK}||^2 = ||\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}||^2 = ||\overrightarrow{AH}||^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} + ||\overrightarrow{HK}||^2$$

Or, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathcal{P}$, auquel appartiennent les points H et K. Ainsi, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} = 0$. De plus, $||\overrightarrow{HK}||^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a bien

$$AK^2 \geqslant AH^2$$

et donc, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$AK \geqslant AH$$

□

■ **Exemple 13 :** On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(1;3;6)$, le point B de coordonnées $(1;1;1)$ et le plan $\mathcal{P}$ passant par B et dirigé par les vecteurs $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_1 = 0 \times 1 + (-2) \times 0 + (-5) \times 0 = 0$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}_1 = 0 \times 2 + (-2) \times 10 + (-5) \times (-4) = 0$
- Ainsi, B appartient au plan $\mathcal{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan $\mathcal{P}$. B est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

■