Exercices : Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire

▶ **Exercice 1 :** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 5$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u}\cdot(3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u})\cdot(4\vec{w} + \vec{u})$?

▶ **Exercice 2 :** On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

▶ **Exercice 3 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

▶ **Exercice 4 :** Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2. $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3. $||\vec{u}|| = \dfrac{3}{2}$, $||\vec{v}|| = \dfrac{2}{5}$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = \dfrac{4}{3}$
4. $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

▶ **Exercice 5 :** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||u \vec{-} v|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Base orthonormée

▶ **Exercice 6 :** L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

▶ **Exercice 7 :** L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;1;2)$, $C(8;2;x)$.

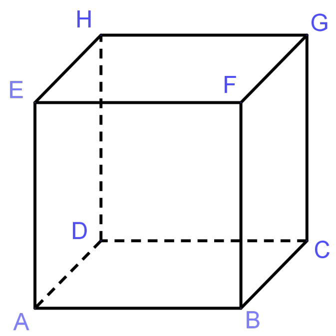
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

▶ **Exercice 8 :** L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3;4;2)$, $B(5;2;2x)$, $C(3;10;x)$. Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

▶ **Exercice 9 :** L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

▶ **Exercice 10 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
2. Quelle est la nature de ce repère ?
3. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$
4. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
5. Quelle est la nature du triangle IJK ?

3 Orthogonalité

▶ **Exercice 11 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;2;3)$ et $C(3;6;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

▶ **Exercice 12 :** On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

▶ **Exercice 13 :** L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

▶ **Exercice 14 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

▶ **Exercice 15 :** L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3; -2; -2)$, $B(1; 3; -8)$ et $C(-2; 0; 4)$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

▶ **Exercice 16 :** On considère les points $A(2; 1; 5)$ et $B(3; 2; 3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

4 Equations cartésiennes de plan

▶ **Exercice 17 :** Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2; 5; -1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

▶ **Exercice 18 :** L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$, $D(5; 3; 0)$

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal eu plan (ABC)
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

▶ **Exercice 19 :** Déterminer, s'il existe, le point d'intersection du plan P d'équation $2x - 3y - 2z + 1 = 0$ et de la droite (d) de représentation $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

▶ **Exercice 20 :** L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $2x + y - z + 3 = 0$ et $3x + 2y - z + 1 = 0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1; 1; 6)$ et $B(2; 0; 7)$ appartiennent aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

▶ **Exercice 21 :** On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(5; 1; 3)$, le point B de coordonnées $(-2; -2; -2)$ et le plan $\mathcal{P}$ passant par B et dirigé par les vecteurs $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On considère le point H de coordonnées $(2; 4; 1)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathcal{P}$
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathcal{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

▶ **Exercice 22 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE)
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG)
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point G sur le plan (BDE)

5 Exercices de synthèse

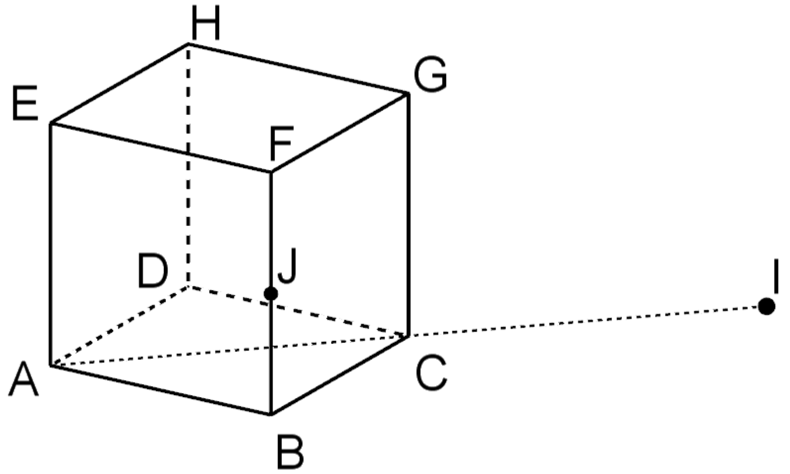
▶ **Exercice 23 :** L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 4y - 5z + 1 = 0$ ainsi que le point $A(6; 8; -9)$

1. Le point A appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.

▶ **Exercice 24 — BAC S 2017 - France métropolitaine. :** L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - z - 3 = 0$. On note A le point de coordonnées $(1; a; a^2)$ où a est un nombre réel.

1. Justifier que, quelle que soit la valeur du réel a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
4. Pour quelle valeur du réel a la distance AH est-elle minimale ?

► **Exercice 25 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 1. L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On considère le point I, symétrique du point A par rapport au point C ainsi que le point J, milieu du segment $[BF]$



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD)
3. En déduire une équation cartésienne du plan (IJD)
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
5. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH)
6. Calculer $\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KD}$ ainsi que les longueurs KB et KD
7. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BKD}$

► **Exercice 26 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $B(1;0;0)$, $C(0;2;0)$ et $D(0;0;3)$. Le tétraèdre $ABCD$ est un tétraèdre trirectangle.

1. Montrer que le plan (BCD) admet pour équation cartésienne $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
2. Donner une équation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (BCD) passant par le point A
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre vaut $\frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de ce tétraèdre. En calculant le volume du tétraèdre $ABCD$ de deux manières différentes, déterminer l'aire du triangle BCD.
5. Montrer que le carré de l'aire du triangle BCD est égale à la somme des carrés des aires des triangles ABC, ABD et ACD.