Loi binomiale

Dans tout ce chapitre, on note Ω l'univers non vide d'une expérience aléatoire.
On rappelle que pour deux événements A et B de Ω, l'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque "à la fois A et B sont réalisés".
De plus, l'événement $\bar{A}$, appelé contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.
$\mathbb{P}(A)$ désignera la probabilité de l'événement A. On a alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1 Rappels : probabilités conditionnelles

1.1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 — Probabilité conditionnelle. : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

■ **Exemple 1 :** On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω. On considère les événements

- A : le nombre est pair
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Par ailleurs, $A \cap B = \{4; 6\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

■

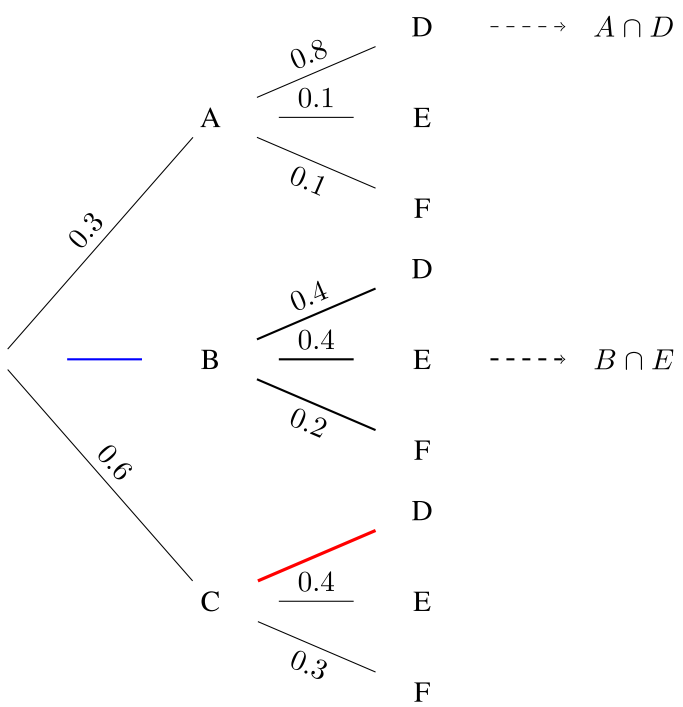
R Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalise.

■ **Exemple 2 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement "la personne répond à l'appel" et Q l'événement "la personne répond au questionnaire.

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) = 0{,}25$ et $\mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3$. Ainsi, La probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075$.
■

1.2 Construction d'un arbre pondéré

■ **Exemple 3 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



> **Propriété 1 — Règle de la somme. :** Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$.
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) = 0.1$.
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
  On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$.

■

R Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon des événements disjoints. Ici, $A \cap B = \varnothing$.

> **Propriété 2 — Règle du produit. :** Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 4 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D.
On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$. ■

R On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

1.3 Formule des probabilités totales

Définition 2 — Partition. : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoires.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont non vides
- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

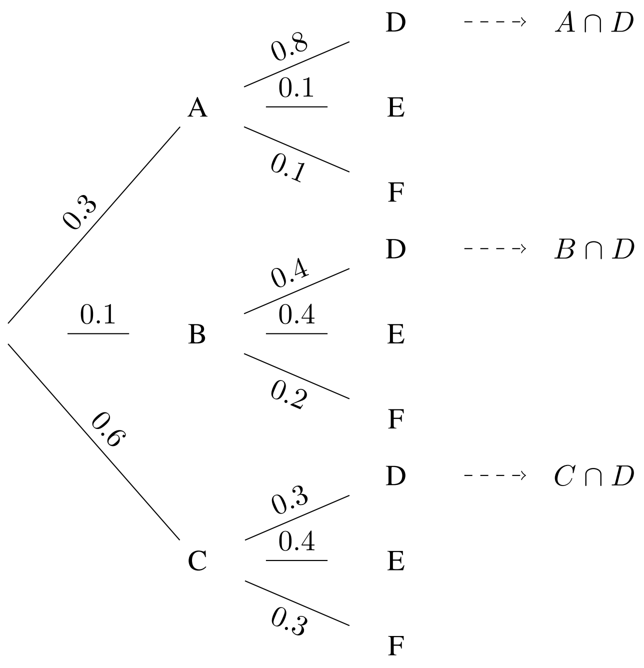
■ **Exemple 5 :** On considère $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1; 3\}$, $A_2 = \{2; 4; 5; 6; 7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω. ■

R Dans le cadre des probabilités, on parle également de système complet d'événements.

Propriété 3 : (Formule des probabilités totales) On considère un événement B et une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers Ω. Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

■ **Exemple 6 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D.



- A, B et C forment une partition de Ω.
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
  - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$
  - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$
  - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$.

■

2 Succession d'épreuves indépendantes

2.1 Produit cartésien

Définition 3 — Produit cartésien. : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle produit cartésien de A et B, noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- Le produit cartésien $A \times A$ est également noté A^2

■ **Exemple 7 :** On considère les ensembles $A = \{2; 5; 9\}$; et $B = \{3; 5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont $(2; 3)$, $(2; 5)$, $(5; 3)$, $(5; 5)$, $(9; 3)$ et $(9; 5)$
- Les éléments de $B \times A$ sont $(3 : 2)$, $(3; 5)$, $(3; 9)$, $(5; 2)$, $(5; 5)$, $(5; 9)$.
- Les éléments de B^2 sont $(3; 3)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$ et $(5; 5)$.

■

Définition 4 — Extension du produit cartésien. : La notion de produit cartésien s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, ..., A_n est l'ensemble des n-uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... $a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times ... \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n. Ses éléments sont appelés les n-uplets de A.

■ **Exemple 8 :** On considère les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$.

- $(1; 7; 3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A$, $7 \in B$ et $3 \in C$
- $(3; 7; 7; 3; 14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B.

■

Définition 5 — Cardinal. : Soit A un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. On appelle Cardinal de A, noté $\text{Card}(A)$, $\sharp A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A.

■ **Exemple 9 :** Le cardinal de l'ensemble $A = \{1; 3; \pi; 5; \sqrt{2}\}$ est 5. ■

Propriété 4 : Soit A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis.

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{Card}(a_1) \times \text{Card}(A_2) \times \ldots \times \text{Card}(A_n)$$

- En particulier, $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$

R On traduit ainsi le fait que si l'on souhaite construire un élément $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ de l'ensemble $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, on a $\text{Card}(A_1)$ choix pour a_1, $\text{Card}(A_2)$ choix pour a_2 etc.

■ **Exemple 10 :** On reprend les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$.

- $\text{Card}(A \times B) = 3 \times 3 = 9$
- $\text{Card}(A \times B \times C) = 3 \times 3 \times 2 = 18$
- $\text{Card}(A^4) = 3^4 = 81$
- $\text{Card}(C^{10}) = 2^{10} = 1024$

■

Propriété 5 : Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

■ **Exemple 11 :** A l'entrée d'un bâtiment est installé un digicode. Pour composer le code, on utilise 4 chiffres compris entre 1 et 6 suivis de deux lettres parmi les lettres A, B, C et D. Un chiffre ou une lettre peuvent être utilisés plusieurs fois. Combien de codes sont possibles ?

- Pour les chiffres, on a 6 choix possibles pour le prmier, 6 pour le deuxième, 6 pour le troisième et 6 pour le quatrième, soit $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$ possibilités
- Pour les lettres, il y a 4 choix pour la première et 4 pour la seconde soit $4 \times 4 = 16$ possibilités.
- En tout, il y a donc $1296 \times 16 = 20736$ digicodes possibles

Formellement, si l'on note $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $A_2 = \{A; B; C; D\}$, un digicode est un élément de $A_1^4 \times A_2^2$. Son cardinal est donc $\text{Card}(A_1)^4 \times \text{Card}(A_2)^2 = 6^4 \times 4^2 = 20736$. ■

2.2 Épreuves indépendantes

Définition 6 — Succession d'épreuves. : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n.

L'univers Ω de la succession de ces n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Les issues de cette succession d'expériences aléatoires sont donc les n-uplets $(i_1\,;\,i_2\,;\,\ldots\,;\,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

■ **Exemple 12 :** On lance 2 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro obtenu. L'univers de cette expérience est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2$. L'issue $(1\,;\,3)$ signifie que l'on a obtenu 1 au premier lancer et 3 au deuxième. ■

Définition 7 — Indépendance mutuelle. : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n, de lois respectives $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, ... , $\mathbb{P}_n$.

Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour toute issue $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

$$\mathbb{P}((i_1,i_2,\ldots,i_n)) = \mathbb{P}_1(i_1) \times \mathbb{P}_2(i_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(i_n)$$

La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités.

■ **Exemple 13 :** M. Lapeyronnie a décidé de faire un petit contrôle surprise à ses élèves. Il place les noms des élèves de la classe dans une urne et une liste d'exercices dans une autre.

- Il y a 35 élèves dans la classe : 23 TGF et 12 TGG
- L'urne des exercices en contient 40 : 20 sur les fonctions, 15 sur les suites et 5 sur la géométrie.

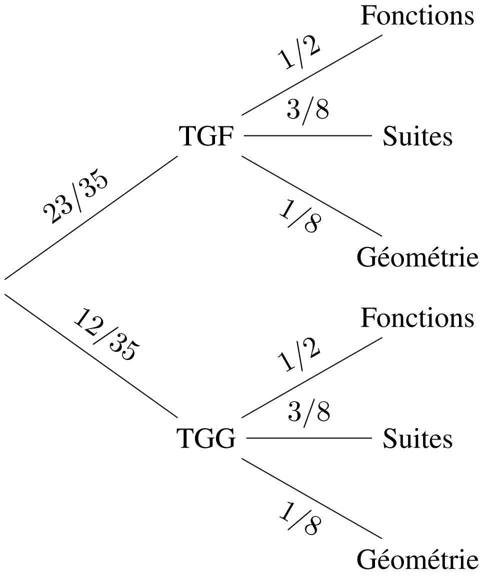
M. Lapeyronnie tire alors simultanément, de manière indépendante, un nom d'élève et un exercice.

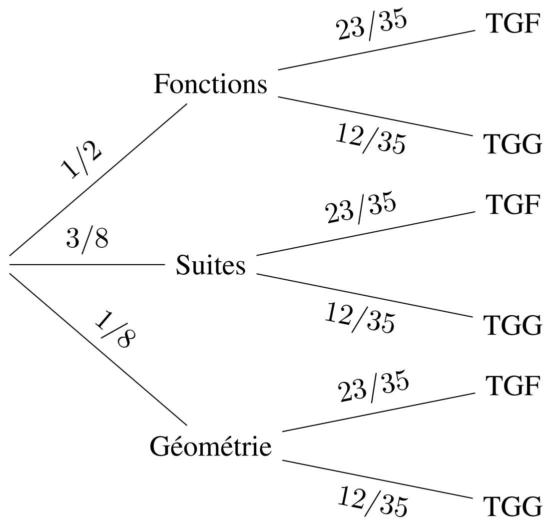
- La probabilité qu'il s'agisse d'un élève de TGG est de $\dfrac{12}{35}$
- La probabilité de tirer un exercice de géométrie est de $\dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$.
- La probabilité qu'un élève de TGG soit envoyé au tableau faire un exercice de géométrie est donc de $\dfrac{12}{35} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{70}$

■

R Si l'on essaie de représenter une succession de n épreuves indépendantes sous la forme d'un arbre de probabilités, on place alors toujours le même sous-arbre à chaque noeud d'un étage fixé. De plus, cet arbre peut être construit "dans un sens comme dans l'autre".

■ **Exemple 14 :** Les arbres suivants traduisent la succession des deux épreuves précédentes.





■

3 Epreuve de Bernoulli

Définition 8 — Epreuve de Bernoulli. : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$. On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1-p$.

Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$. On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Epreuve de Bernoulli

Evt	S	$\overline{S}$
Proba	p	$1-p$

Variable de Bernoulli

k	1	0
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$1-p$

■ **Exemple 15 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{1}{6}$. ■

Propriété 6 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X]=p, \quad Var(X)=p(1-p), \quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 3.1 : La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$. Ainsi,

- $E[X]=0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$.
- $Var(X)=\mathbb{P}(X=0)\times(0-E[X])^2+\mathbb{P}(X=1)\times(1-E[X])^2=(1-p)\times(-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p)$

□

■ **Exemple 16 :** Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,2. On a alors $E[X]=0{,}2$, $Var(X)=0{,}2\times 0{,}8=0{,}16$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$. ■

4 Loi binomiale

4.1 Schéma de Bernoulli

Définition 9 — Schéma de Bernoulli. : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, chacune de paramètre p.

■ **Exemple 17 :** On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès "la pièce tombe sur FACE". Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

■ **Exemple 18 :** On lance 42 fois de suite un dé. On considère comme succès "le dé fait tombe sur 5 ou 6". Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 42 et $\frac{2}{3}$ ■

4.2 Coefficients binomiaux

Définition 10 — Factorielle. : Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (factorielle de n) le produit de tous les entiers de 1 à n

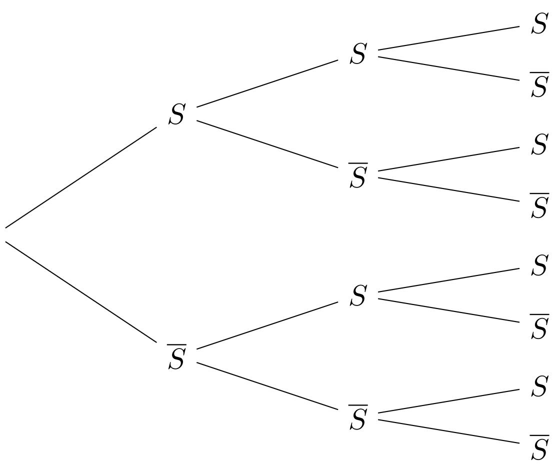
$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

■ **Exemple 19 :** $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad ; \quad \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$ ■

Définition 11 — Coefficient binomial. : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est le nombre de chemins qui, dans un chemin de Bernoulli à n épreuves, aboutissent à exactement k succès.

■ **Exemple 20 :** On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves



Pour obtenir 2 succès, il y a 3 chemins possibles : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$

■

Propriété 7 : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

■ **Exemple 21 :** $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1)} = 5 \times 2 = 10.$ ■

Propriété 8 : Soit n un entier naturel non nul.

- Pour tout entier naturel $k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- Si $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

■ **Exemple 22 :** $\binom{25}{1} = 25$, $\binom{43}{42} = \binom{43}{1} = 43$, $\binom{101}{2} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050.$ ■

Démonstration 4.1 — Avec la formule. :

- Pour tout entier naturel $k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

- D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{0} = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$. Or, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$
- D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$.

  Or, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$
- D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$.

  Or, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

□

Démonstration 4.2 — Par dénombrement. :

- Chaque chemin aboutissant à k succès aboutit également à $n-k$ échecs. En échangeant le rôle des succès et des échecs, on obtient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Le seul chemin aboutissant à n succès est le chemin qui ne comporte que des succès. $\binom{n}{n} = 1$.
- Le seul chemin aboutissant à 0 succès est le chemin qui ne comporte que des échecs. $\binom{n}{0} = 1$.

□

4.3 Loi binomiale

Définition 12 — Loi binomiale. : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuve de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et b. On écrit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

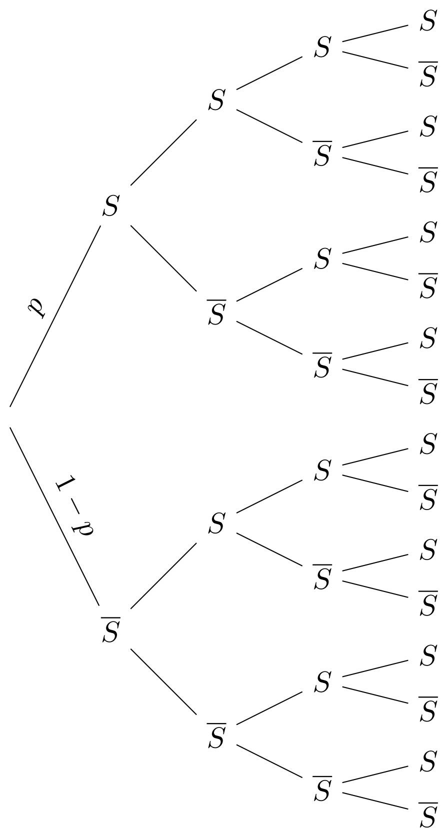
■ **Exemple 23 :** On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\dfrac{1}{2}$

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{1}{2}$. ■

R Lorsque n vaut 1, on a une loi de Bernoulli de paramètre p.

■ **Exemple 24 :** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et p. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :



Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{S}\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS\overline{S}$. De plus,

- $\mathbb{P}(SS\overline{S}\overline{S}) = p\times p\times(1-p)\times(1-p) = p^2(1-p)^2$
- $\mathbb{P}(S\overline{S}S\overline{S}) = p\times(1-p)\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$
- $\mathbb{P}(S\overline{S}\overline{S}S) = p\times(1-p)\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$
- $\mathbb{P}(\overline{S}\overline{S}SS) = (1-p)\times(1-p)\times p\times p = p^2(1-p)^2$
- $\mathbb{P}(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p)\times p\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$
- $\mathbb{P}(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p)\times p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$ ■

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc

$$\mathbb{P}(X=2) = 6p^2(1-p)^2$$

En modifiant cette écriture, on a en réalité

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2}$$

Propriété 9 : Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration 4.3 : On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves. L'ensemble des issues aboutissant à k succès correspond à l'ensemble des n-uplets de $\{S; \overline{S}\}$ ayant exactement k fois la lettre S : il y en a $\binom{n}{k}$. Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: chacun des k succès a une probabilité de p et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

■ **Exemple 25 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ? On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ (le nombre de lancers) et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X = 2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{n}{2} \times p^2 \times (1-p)^{n-2} = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{75}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ? On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ (le nombre de lancers) et $p = \frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 6, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $Y \geqslant 1$, c'est-à-dire "obtenir au moins 1 succès". Il y a plusieurs manières de procéder

- Décomposer l'événement $Y \geqslant 1$ en donnant tous les cas possibles : $Y = 1$, $Y = 2$ ou $Y = 3$
- Passer par le complémentaire : $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1)$. Or, la seule valeur pour laquelle $Y < 1$ est $Y = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0)$. Or, $\mathbb{P}(Y = 0) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

  Finalement, $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

■

Propriété 10 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

■ **Exemple 26 :** Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions. Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.

On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève. X désigne donc le nombre de succès (bonnes réponses) d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves, chaque épreuve ayant une probabilité de succès de $\frac{1}{4}$. X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$.

Ainsi, $E[X] = 20 \times \frac{1}{4} = 5$. L'élève peut espérer avoir 5 bonnes réponses. ■