Exercices : Continuité

1 Continuité d'une fonction

► **Exercice 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

► **Exercice 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

► **Exercice 3 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x^2+x+1 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+9 & \text{si } -2 < x < 3 \\ 4x-1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

1. La fonction f est-elle continue en -2 ? en 3 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en -2 ? en 3 ?

► **Exercice 4 :** Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

► **Exercice 5 :** Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.
Donner une condition sur les réels a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2 Suites et fonction continue

► **Exercice 6 :** Déterminer les limites suivantes, en énonçant bien les propriétés utilisées.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$

► **Exercice 7 :** On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{3}{u_n+1} + 3$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ **Exercice 8 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1. Supposons que (u_n) converge : quelle peut-être sa limite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
3. Montrer que la suite u_n est croissante.
4. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

▶ **Exercice 9 :** On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n - 4$.

1. Supposons que la suite (u_n) converge. Quelle peut être sa limite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
3. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

3 Théorème des valeurs intermédiaires

▶ **Exercice 10 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 2\cos(x)$, définie sur $\mathbb{R}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Que vaut $f(0)$? Que vaut $f(\pi)$?
3. En déduire que l'équation $e^x = 2\cos(x)$ possède au moins une solution sur $[0; \pi]$.

▶ **Exercice 11 :** Montrer que l'équation $x\sin(x) = \cos(x)$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[0; \pi]$.

▶ **Exercice 12 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - 3x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x
3. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; 1]$?
4. Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(1)$?
5. En déduire que l'équation $e^x = 3x$ admet exactement une solution sur $[0; 1]$.

▶ **Exercice 13 :** On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice 14 :** Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

▶ **Exercice 15 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$
2. En déduire que l'équation $x^5 = 2x + 4$ possède au moins une solution sur $[1; 2]$.
3. Donner une solution de cette équation au centième près

▶ **Exercice 16 :** Montrer que l'équation $e^x = 3x + 1$ possède une solution sur l'intervalle $[1; 2]$. Donner une valeur d'une solution de cette équation au dixième près.

▶ **Exercice 17 — Bac S - Asie 2019. :** On admet que la fonction g définie pour tout $t \geqslant 0$ par $g(t) = 10 + 70e^{-0.2t}$ permet de modéliser la température en degré Celsius d'un café initialement à une température de 80 degrés Celsius puis placé dans un milieu à 10 degrés Celsius. L'instant t est exprimé en minutes.

Une personne aime boire son café à 40 °C. Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$. Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

▶ **Exercice 18 — Bac S - Polynésie 2019. :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{20}\left(x - \dfrac{1}{x^4}\right)$. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0; 1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4 Exercices de synthèse

▶ **Exercice 19 — Bac S - Métropole 2019. :** On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$
2. Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution que l'on notera α

▶ **Exercice 20 — Bac S - Polynésie 2016. :** Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang, exprimée en grammes par litre, est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = 2te^{-t}$

1. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$
2. A quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque $t \to +\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

▶ **Exercice 21 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$$

Partie A : Etude de fonction

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^{x-1}}$.
3. Construire le tableau de variations de f en y indiquant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. En déduire que pour tout $x > 1$, $f(x) \in [0;1]$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ possède également 2 solutions sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude de suite

Soit a un réel. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On se propose d'étudier le comportement de la suite (u_n) en fonction du réel a.

1. On suppose que la suite (u_n) converge et on note l sa limite. Justifier que $f(l) = l$.
2. En déduire les valeurs possibles pour l
3. On suppose que $a = 0$. Calculer u_1. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) dans ce cas ?
4. On suppose que $a \in]0;1]$
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
5. On suppose que $a > 1$. Montrer que $u_1 \in [0;1]$. Que peut-on en déduire sur la convergence et la limite de (u_n) ?

5 Pour aller plus loin...

▶ **Exercice 22 :** Soit f une fonction définie sur $[0;1]$ et telle que pour tout réel x dans cet intervalle, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [0;1]$ tel que $f(x) = x$.

▶ **Exercice 23 :** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale de degré k s'il existe des réels a_0, a_1, ..., a_k avec $a_k \neq 0$ tels que, pour tout réel x, $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Par exemple, la fonction $x \mapsto 2x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 1 + 5$ est polynômiale, de degré 5. Dans tout l'exercice, on considère une fonction f polynômiale.

1. On suppose que le degré k de f est impair.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en fonction du signe de a_k.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que le degré k de f est pair.
   (a) Montrer que si a_k et a_0 sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins deux solutions sur $\mathbb{R}$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?