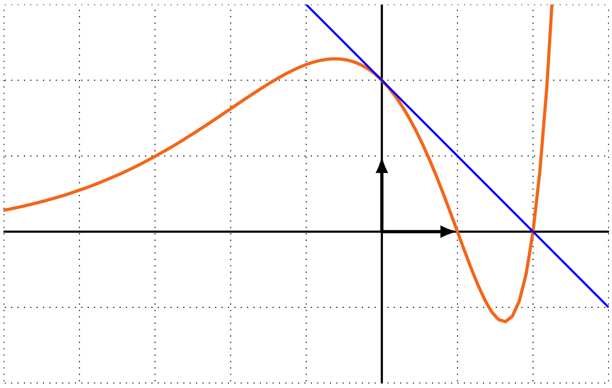
Exercices : Dérivation

1 Convexité

► Exercice 1
On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$
3. La fonction f est-elle convexe ou concave sur l'intervalle $[-5\,;\,-2]$? sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$? sur l'intervalle $[1\,;2\,]$?

► Exercice 2
On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		0		3
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

On sait de plus que f est convexe sur $[-5; -2]$ puis concave sur $[-2; 3]$. Tracer une courbe représentative compatible avec ces données.

► Exercice 3
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. f peut-elle être strictement croissante puis strictement décroissante ?

2 Convexité des fonctions dérivables

▶ Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit a un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{(a-x)^2}{a^2x}$$

2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

▶ Exercice 5

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

▶ Exercice 6

Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 7

Montrer que la fonction $\ln$ est concave sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice 8

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ?

▶ Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$
2. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x

$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

5. Construire le tableau de signes de f'' et en déduire les intervalles lesquels f est convexe/concave.
6. Donner les équations des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et -1.
7. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 1 et -1.

► Exercice 10

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

1. Justifier que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$
5. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$$
6. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.

3 Inégalités de convexité

► Exercice 11

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?
2. Pour tout réel x dans ce domaine, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$
3. f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$

► Exercice 12

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$

1. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
2. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
3. Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

► Exercice 13

En utilisant la tangente à la courbe de la fonction $\ln$ en 1, montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$

► Exercice 14

En utilisant l'inégalité des milieux appliqué à la fonction $\ln$, montrer que pour tous réels strictement positif a et b, on a
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$
Cette inégalité s'appelle l'inégalité arithmético-géométrique.

4 Exercices de synthèse

▶ Exercice 15

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+10x-16}{x^2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f'(x) = \dfrac{-10x+32}{x^3}$
   (b) Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[2;8]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2;8]$, $f''(x) = \dfrac{20x-96}{x^4}$
   (b) Déterminer sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (c) Montrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'absisse $4{,}8$ est un point d'inflexion de f.

▶ Exercice 16

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-3}{2}\right)^2$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.
4. En déduire les intervalles où la fonction f est convexe.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 17

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathcal{C}_f$.

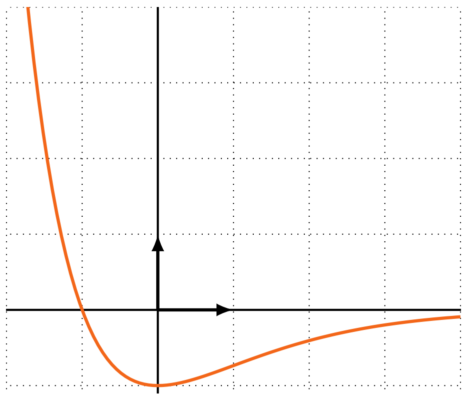
1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On y inclura les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = (16x^2-32x+12)e^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}$$
3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en chacun des points d'inflexion.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. Comment interpréter cette propriété ?
6. Représenter l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.

▶ Exercice 18

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que la fonction f est convexe sur D.
3. En utilisant l'inégalité des points milieux, montrer que pour tous réels a et b strictement positifs,
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$$

► Exercice 19 — Bac 2021 – Métropole.
Partie A
On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



A l'aide de cette courbe, donner, en justifiant
1. Le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Partie B
On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

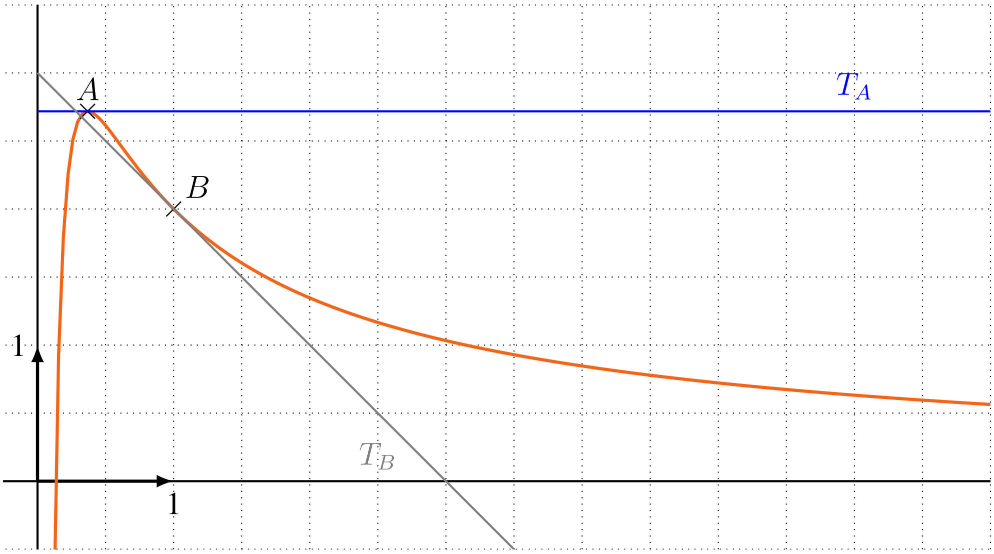
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
1. Montrer que, pour tout nombre réel x,
$$f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
   (b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

► Exercice 20 — Bac 2021 – Sujet zéro.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}\ ;\ e\right)$
- la tangente T_B à la courbe C_f au point B de coordonnées $(1\ ;\ 2)$

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;3)$.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et $f'(1)$
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie B

On suppose maintenant que la fonction f est définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points A et B et coupe l'axe des abscisses en un unique point que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}$$

   (b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.