Exercices : Variables aléatoires

1 Notion de variable aléatoire

► **Exercice 1 :** On lance un dé à six faces, numérotées de 1 à 6, et on regarde la face du dessus. Si le nombre est impair, on gagne le nombre de points inscrits sur le dé. Si le nombre est pair, on perd ce nombre de points. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

1. Que valent $X(3)$ et $X(6)$?
2. Quelles issues correspondent à l'événement $\{X > 0\}$?
3. Quelles issues correspondent à l'événement $\{X \leqslant -3\}$?

► **Exercice 2 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée ci-dessous.

k	-2	1	2	3	5	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
2. A l'aide du tableau, déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 3)$.
3. Quelles valeurs prises par la variable X remplissent la condition $X \geqslant 2$?
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$.
5. De la même manière, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$

► **Exercice 3 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans un tableau.

k	-2	0	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.3	p	0.2

1. Déterminer la valeur du réel p pour que l'on ait effectivement une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

► **Exercice 4 :** Dans une urne, on place 7 boules vertes, 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule au hasard : si la boule est bleue, on gagne 3 euros. Si elle est rouge, on gagne 1 euro, sinon, on perd un euro. On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce tirage. Donner la loi de probabilité de la variable X.

► **Exercice 5 :** On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on regarde le résultat à chaque fois.

1. Construire un arbre de probabilités de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de Pile. Donner la loi de probabilité de X.
3. Reprendre les deux dernières questions si la pièce est truquée et que la probabilité d'obtenir Pile est de 0.6.

▶ **Exercice 6 :** On lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

▶ **Exercice 7 :** On choisit un nombre uniformément au hasard entre 15 et 25. On note S la somme des chiffres de ce nombre. Déterminer la loi de la variable aléatoire S.

2 Espérance, variance, écart-type

▶ **Exercice 8 :** Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X, dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	1	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	0.4	0.2	0.1	0.2

▶ **Exercice 9 :** On place 1 boule blanche et n boules noires dans une urne. On tire au hasard une boule dans cette urne. Si elle est blanche, on gagne 10 euros. Sinon, on perd 10 euros. On note X la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur, positif ou négatif.

1. Quelle est, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. Construire la loi de probabilité de X
3. Calculer $E[X]$ en fonction de n
4. On dit que le jeu est équitable si $E[X] = 0$. Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?

▶ **Exercice 10 :** On lance un dé équilibrer à six faces, numérotées de 1 à 6, et on regarde la face du dessus. Si le nombre est impair, on gagne le nombre de points inscrits sur le dé. Si le nombre est pair, on perd ce nombre de points. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il équitable ?

▶ **Exercice 11 :** On considère un entier naturel n strictement positif. On choisit un nombre au hasard entre 1 et n inclus et note X le résultat obtenu.
Montrer que $E[X] = \dfrac{n+1}{2}$.

▶ **Exercice 12 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(4; 0.25)$.

1. Résumer la loi de X dans un tableau
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Faire de même avec une loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0.2)$ et $\mathcal{B}(5; 0.9)$.
4. Conjecturer une formule qui donne l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

3 Opérations sur les variables aléatoires

► **Exercice 13 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau ci-dessous.

k	-1	2	5	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\ldots$

1. Compléter ce tableau avec la probabilité manquante.
2. On considère la variable aléatoire Y telle que $Y = 2X$. Construire le tableau résumant la loi de probabilité de Y.

► **Exercice 14 :** On considère la variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant :

k	-3	-1	2	4
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X + 2$.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = 2X - 1$.

► **Exercice 15 :** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 1, 3 et 5. Soit Y une variable aléatoire prenant les valeurs 1, 2 et 4.

1. Donner les valeurs prises par $X + Y$
2. Donner les valeurs prises par $3X - Y$

► **Exercice 16 :** On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\ldots$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\ldots$

1. Compléter ces tableaux avec les probabilités manquantes
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$
3. Que vaut $\mathbb{P}(X + Y = 5)$?
4. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W = X + Y$
5. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A = 3X - 2Y$.

► **Exercice 17 :** On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants

k	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

et

k	1	4	5
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $X+Y$
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $2X+3Y$.

4 Espérance et variance d'une somme de variables

► **Exercice 18 :** On considère les deux variables aléatoires X et Y de l'exercice précédent
1. Calculer l'espérance de X et celle de Y
2. En déduire l'espérance de $3X+2$, de $X+Y$ et de $5X-2Y$

► **Exercice 19 :** Soit X et Y deux variables aléatoire indépendantes telles que $\mathbb{E}(X)=3$, $\mathbb{E}(Y)=-5$, $Var(X)=1$ et $Var(Y)=2$.
1. On considère la variable aléatoire $Z_1=2X+3Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1
2. On considère la variable aléatoire $Z_2=4X-2Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_2.
3. On considère la variable aléatoire $Z_3=3Y-2X+7$. Donner l'espérance et la variance de Z_3.

► **Exercice 20 :** On dit qu'une variable aléatoire réelle est centrée si son espérance est nulle. Montrer que pour toute variable aléatoire X, la variable aléatoire $Y=X-\mathbb{E}(X)$ est centrée.

► **Exercice 21 :** On dit qu'une variable aléatoire X est centrée réduite si son espérance est nulle et sa variance vaut 1.

Montrer que pour toute variable aléatoire X non constante, la variable $Y=\dfrac{X-\mathbb{E}(\mathbb{X})}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

► **Exercice 22 :** Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètres 15 et $\dfrac{1}{10}$. Donner l'espérance et la variance de X. Donner son écart-type à 10^{-2} près.

► **Exercice 23 :** Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale. On suppose que $\mathbb{E}(X)=6$ et $Var(X)=4$. Retrouver les paramètres de la loi binomiale.

► **Exercice 24 :** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0.3)$ et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0.2)$. On suppose que X et Y sont des variables indépendantes.

1. Donner les espérances et variances de X et Y. Donner leur écart-type arrondi au millième.
2. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type arrondi au millième de la variable aléatoire Z définie par $Z = 2X - 3Y$.

► **Exercice 25 :** On lance trois pièces de monnaies et on regarde sur quels côtés elles tombent.

1. On note X le nombre de FACE obtenus
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
   (b) Construire le tableau résumant la loi de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois pièces tombent du même côté et 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de Y ? On précisera la valeur du ou des paramètres(s).
   (b) Que vaut l'espérance de Y ?
3. Le jeu consiste à miser deux euros. Si les trois pièces tombent sur les mêmes faces, on reprend sa mise et on remporte cinq euros supplémentaires. Sinon, on perd la mise. On note Z la variable aléatoire qui détermine le gain algébrique du joueur
   (a) Justifier que $Z = 7Y - 2$
   (b) En déduire l'espérance de Z. Ce jeu est-il équitable ?

5 Exercices de synthèse

► **Exercice 26 :** Une urne contient 100 jetons parmi lesquels 10 sont gagnants. Pour jouer à la loterie, un joueur doit payer 10 euros et tire au hasard et successivement deux jetons, en remettant entre temps le jeton tiré. Chaque jeton gagnant tiré lui rapporte 20 euros.

1. On note X le nombre de jetons gagnants tirés. Quelle est la loi de X ? Quels sont ses paramètres ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. On note Y le gain algébrique d'un joueur. Expliquer pourquoi $Y = 20X - 10$
4. En déduire l'espérance de Y. Ce jeu est-il équitable ?

► **Exercice 27 :** On considère les deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont données ci-dessous

k	2	1	-1
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

et

k	1	2	-2
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et Y.
2. On propose le jeu suivant : 8 boules sont dans une urnes. On mise un euro et on tire une de ces boules au hasard. 5 sont perdantes, 2 font gagner 2 euros et 1 fait gagner 3 euros. Quelle variable aléatoire permet de modéliser ce jeu ?
3. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Proposer une expérience aléatoire correspondant à la variable aléatoire Y

5. On réalise deux fois le jeu correspondant à la variable X et trois fois celui correspondant à la variable Y. On note Z le gain algébrique de cette successions de jeu. Sans déterminer précisément la loi de Z, dire si ce jeu est avantageux pour le joueur ou non.

► **Exercice 28 — Bac S Asie 2015. :** Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0.8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible douze fois ?

► **Exercice 29 — Bac S Nouvelle Calédonie 2013. :** Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm. Toutes les billes produites sont conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes. On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,0124. On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées. On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?
2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?
4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

► **Exercice 30 :** Un lave-vaisselle, est garanti gratuitement pendant les deux premières années. L'entreprise propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires. Des études statistiques menées sur les clients qui prennent l'extension de garantie montrent que 11,5% d'entre eux font jouer cette extension.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise).
   (a) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.
   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.
2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, l'entreprise remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année. On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise, grâce à l'extension de garantie.
   (a) Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner sa loi de probabilité.
   (b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

▶ **Exercice 31 :** Une compagnie de transports souhaite optimiser les contrôles afin de limiter les pertes occasionnées par les fraudes des voyageurs. L'étude porte sur 40 trajets mensuels correspondant aux 20 allers-retours des jours ouvrables. Le prix du ticket est fixé à 10 euros. L'amende en cas de non possession d'un ticket est de 100 euros.

Pour chaque voyageur, la probabilité d'être contrôlé est égale à p, où p est un réel compris entre 0 et 1. On suppose que les contrôles sont indépendants les uns des autres.

Alice effectue les 40 trajets mensuels. Pour $i \in \{1; ...; 40\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Alice est contrôlée au trajet i et 0 sinon. On définit alors la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{40}$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? On précisera ses paramètres.
2. On suppose dans cette partie que $p = \dfrac{1}{20}$
   (a) Quelle est l'espérance de X ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la probabilité qu'Alice soit contrôlée au maximum deux fois durant le mois ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
3. La compagnie cherche la probabilité de contrôle à partir de laquelle il devient désavantageux de frauder tous les jours. On note Z le gain algébrique réalisé par le fraudeur
   (a) Justifier que $Z = 400 - 100X$
   (b) A partir de quelle probabilité p l'espérance de Z est-elle négative ?
4. On désire déterminer la valeur de p à partir de laquelle la probabilité qu'Alice subisse au moins 3 contrôles en un mois soit supérieur ou égale à 99%.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 3) = 1 - (1-p)^{38}(741p^2 + 38p + 1)$
   (b) On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; 1]$ par
   $$f(x) = 1 - (1-x)^{38}(741x^2 + 38x + 1)$$
   Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel x_0 tel que $f(x_0) = 0.99$.
   (d) Donner une valeur de x_0 à 0.01 près.

▶ **Exercice 32 :** On range n objets dans une commode contenant n tiroirs, chaque objet étant placé uniformément au hasard et indépendamment des autres objets dans l'un de ces tiroirs. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

Partie A : Etude de cas particuliers

1. On suppose qu'il y a 2 tiroirs et 2 objets à ranger.
   (a) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement des 2 objets. Construire le tableau donnant la loi de X
   (b) En déduire l'espérance de X.
2. On suppose qu'il y a 3 tiroirs et 3 objets à ranger dans la commode. Un rangement peut alors être assimilé à un 3-uplet de $\{1; 2; 3\}$. Par exemple, le 3-uplet $(2; 1; 2)$ signifie que le premier objet est rangé dans le tiroir 2, le deuxième objet dans le tiroir 1 et le troisième objet dans le tiroir 2.
   (a) Combien de rangements différents peut-on effectuer ?
   (b) Combien de rangements laissant le tiroir 1 vide peut-on effectuer ?
   (c) Pour $k \in \{1; 2; 3\}$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon. Quelle est la loi de X_1 ?
   (d) On considère la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + X_3$. Que vaut $\mathbb{E}[X]$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Cas général

On dispose désormais de n objets que l'on répartit uniformément au hasard et de manière indépendante dans les n tiroirs.

1. Pour $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ on note Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon. Montrer que l'espérance de Y_1 vaut $\dfrac{(n-1)^n}{n^n}$
2. En déduire le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.