

Variabes aléatoires réelles

1 Notion de variable aléatoire

1.1 Variable aléatoire

Définition 1 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans \mathbb{R} .

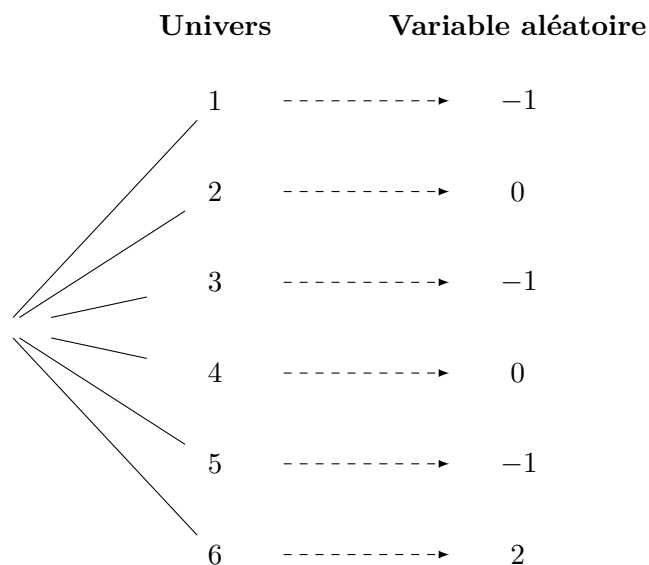
Les variables aléatoires sont en général notées X .

■ **Exemple 1 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point. On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points. On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0$, $X(3) = -1$, $X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.



Définition 2 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.

On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.

On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leq a\}$, $\{X \geq a\}$...

■ **Exemple 2 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $\{X = -1\}$ correspond aux issues qui font perdre un point, c'est-à-dire les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $\{X \geq 0\}$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, c'est-à-dire les issues 2, 4 et 6.

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 3 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω .

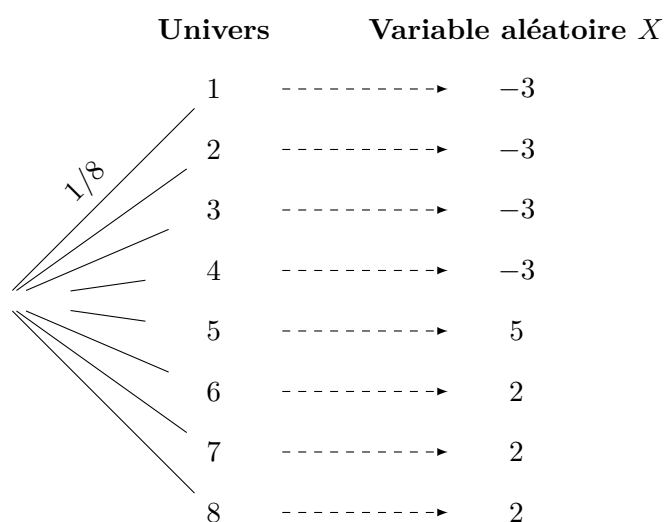
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k , associe la probabilité de l'événement $\mathbb{P}(X = k)$.

R On rappelle que la somme des probabilités doit valoir 1 !

■ **Exemple 3 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3 , 2 ou 5 . Pour déterminer la loi de X , il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

- L'événement $\{X = -3\}$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- L'événement $\{X = 2\}$ est composé des issues 6, 7 et 8. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$
- L'événement $\{X = 5\}$ est composé de l'issue 5. Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{8}$

On peut résumer cela dans un tableau

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

■

2 Espérance, variance et écart-type

2.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 4 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X .

Pour i allant de 1 à n , on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance de X , notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i$$

R Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X , pondérées par leurs probabilités.

■ **Exemple 4 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X] = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{4} \times 8 = \frac{8}{3}$$

"En moyenne", la variable aléatoire X vaut $\frac{8}{3}$. ■

2.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X . La variance X , notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = p_1(x_1 - E[X])^2 + p_2(x_2 - E[X])^2 + \dots + p_n(x_n - E[X])^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E[X])^2$$

Cette quantité mesure la dispersion autour de l'espérance.

R On a en fait $V(X) = E[(X - E[X])^2]$

■ **Exemple 5 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X .

$$E[X] = -3 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.15 + 9 \times 0.05 = -0.55$$

Pour calculer la variance,

- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire.
- On met chaque nombre obtenu au carré
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$	-2.45	1.55	4.55	9.55
$(x_i - E[X])^2$	6.0025	2.4025	20.7025	91.2025
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$	3.6015	0.4805	3.105375	4.560125

La variance de X vaut donc

$$V(X) = 3.6015 + 0.4805 + 3.105375 + 4.560125 = 11.7475$$

■

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X , noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

R L'écart-type mesure la variation moyenne de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 6 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) = \sqrt{11.7475} \simeq 3.42$ ■

3 Opérations sur les variables aléatoires

3.1 Sommes et produits par un réel

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur Ω . Soit a un réel non nul. La variable aléatoire aX est définie par

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, (aX)(\omega) = a \times X(\omega)$$

Ainsi, pour tout réel k ,

$$\mathbb{P}(aX = k) = \mathbb{P}\left(X = \frac{k}{a}\right)$$

■ **Exemple 7 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X le résultat obtenu. La loi de la variable aléatoire de X est donc résumée dans le tableau ci-dessous.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On note Y la variable aléatoire telle que $Y = 3X$. Ainsi, Y est la variable aléatoire qui multiplie par 3 le nombre obtenu. La loi de Y peut être résumée par le tableau ci-dessous.

k	3	6	9	12	15	18
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

■

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω et a un réel. La variable aléatoire $Y = X + a$ est définie par

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, Y(\omega) = X(\omega) + a$$

Ainsi, pour tout réel k ,

$$\mathbb{P}(X + a = k) = \mathbb{P}(X = k - a)$$

■ **Exemple 8 :** On lance un dé équilibré à 4 faces, numérotées de 1 à 6, et on note X la variable aléatoire qui donne le numéro porté par la face du dessous. La loi de X peut être résumée ci-dessous.

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On note Y la variable aléatoire qui donne le numéro porté par la face du dessous et lui retire 3. On a alors $Y = X - 3$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X - 3 = 1) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{4}$$

On peut alors résumer la loi de Y dans un tableau.

k	-2	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

■

3.2 Somme de deux variables aléatoires

Définition 9 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω . La variable aléatoire $Z = X + Y$ est définie par

$$\text{Pour tout } \omega \in \Omega, Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

Par ailleurs, pour tout réel k ,

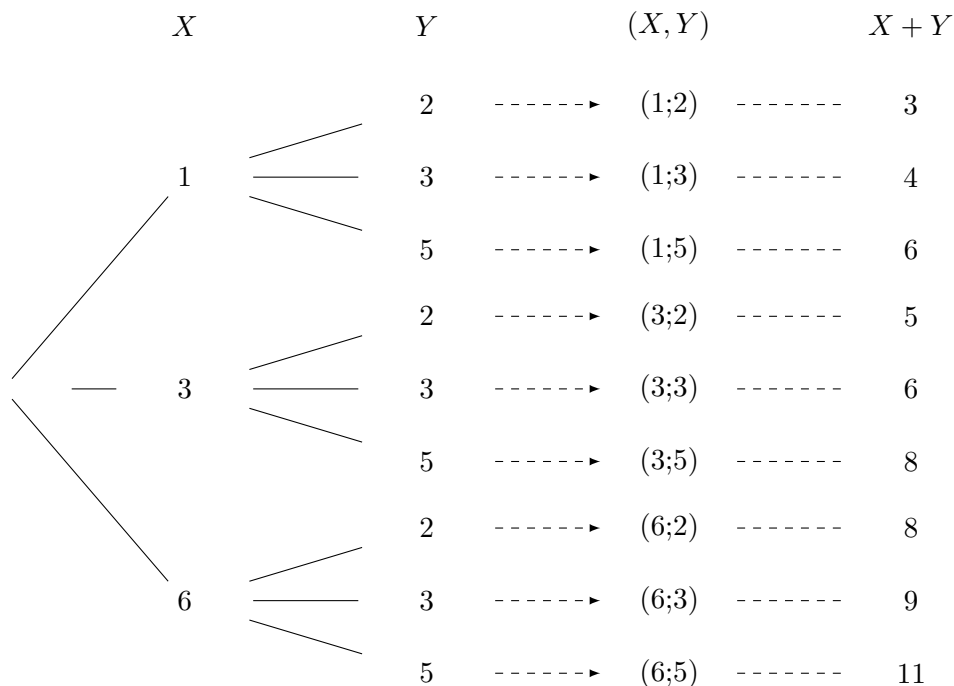
$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$$

Si X et Y sont indépendantes, on a alors

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$$

■ **Exemple 9 :** On possède deux urnes comportant des boules numérotées. La première contient trois boules, portant respectivement les numéros 1, 3 et 6. La seconde contient quatre boules, portant respectivement les numéros 2, 3 et 5. On tire uniformément au hasard une boule dans chaque urne et on fait la somme des numéros ainsi tirés.

Notons X la variable aléatoire donnant le résultat du tirage dans la première urne et Y la variable aléatoire donnant le résultat du tirage dans la deuxième urne. On cherche alors à déterminer la loi de $X + Y$. Un arbre peut nous permettre d'y voir plus clair...



Les tirages possibles sont (1; 2), (1; 3), (1; 5), (3; 2), (3; 3), (3; 5), (6; 2), (6; 3) et (6; 5). Les sommes possibles sont ainsi 3, 4, 5, 6, 8, 9 et 11.

Les tirages étant indépendants, on a

$$\mathbb{P}(X + Y = 3) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

On remarque que l'on peut obtenir la somme 6 de plusieurs façons : en obtenant (1; 5) ou (3; 3). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X + Y = 6) = \mathbb{P}(X = 1) \times \mathbb{P}(Y = 5) + \mathbb{P}(X = 3) \times \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

En faisant ainsi pour chaque valeur possible de la somme, on construit le tableau de la loi de $X + Y$.

k	3	4	5	6	8	9	11
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

■

4 Espérance et variance d'une somme de variables

4.1 Cas général

Propriété 1 : Soit X et Y deux variables aléatoires, a et b deux réels.

- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

■ **Exemple 10 :** On considère le jeu suivant : la participation est fixée à 8 euros. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on remporte deux fois la somme inscrite sur le dé. On considère la variable aléatoire X qui donne le résultat du lancer et Y le gain du joueur, positif ou négatif. On a alors $Y = 2X - 8$. L'espérance de X est 3,5. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X - 8) = 2\mathbb{E}(X) - 8 = 2 \times 3,5 - 8 = -1$. L'espérance étant négative, le jeu est défavorable au joueur. ■

Propriété 2 : Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, a un réel.

- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

4.2 Applications à la loi binomiale

Propriété 3 : Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Notons $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. S suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Réciproquement, si une variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres n et p , alors S peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

■ **Exemple 11 :** On lance 6 fois une pièce de monnaie équilibrée. Chaque PILE obtenu rapporte un euro. La variable aléatoire Y qui donne les gains à la fin des 6 lancers suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{1}{2}$. ■

Propriété 4 : Soit S une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p .

- $\mathbb{E}(S) = np$
- $Var(S) = np(1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Démonstration 4.1 : On écrit S comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Or, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $Var(X_i) = p(1 - p)$. On a donc $\mathbb{E}(S) = p + p + \dots + p = np$. De plus, les variables X_i étant indépendantes, $Var(S) = p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) = np(1 - p)$. \square

■ **Exemple 12 :** On lance 12 dés équilibrés à 6 faces, numérotés de 1 à 6. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = 12 \times \frac{1}{6} = 2$ et $Var(Y) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$. ■