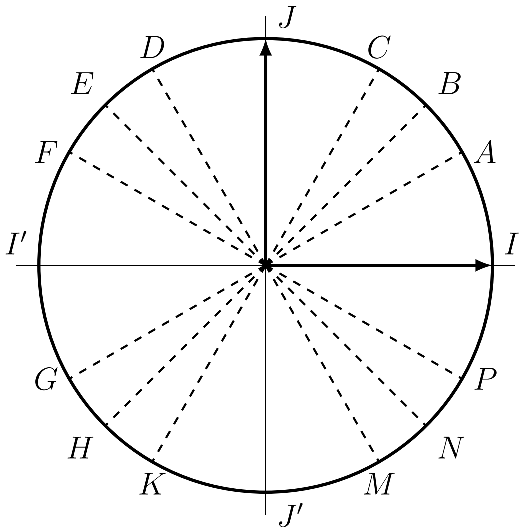
Exercices : Fonctions trigonométriques

Dans tous les exercices, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

1 Rappels

► **Exercice 1 :** On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants

π	2π	-3π	18π
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{17\pi}{2}$	$\dfrac{-7\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{-5\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$
$\dfrac{-7\pi}{4}$	$\dfrac{19\pi}{3}$	$\dfrac{-37\pi}{6}$	$\dfrac{23\pi}{4}$

► **Exercice 2 :** (*) En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

► **Exercice 3 :** Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

► **Exercice 4 :** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in]-\pi;\pi]$.

$$\cos(x)=\frac{1}{2} \qquad \sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(x)=0 \qquad \sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

► **Exercice 5 :** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [0;2\pi[$.

$$\sin(x)=\frac{1}{2} \qquad \cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(x)=0 \qquad \sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

► **Exercice 6 :** Résoudre l'équation $\cos(x)^2-\dfrac{1}{2}=0$ sur $[0;2\pi]$.

▸ **Exercice 7 :** Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$

$$\cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \qquad \cos(x) \geqslant 0 \qquad \cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos(2x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

▸ **Exercice 8 :** Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$

$$2\cos(x)+1 > 2 \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 1-\sqrt{3} \leqslant -2\cos(2x)+1 \leqslant 0$$

2 Fonctions trigonométriques

▸ **Exercice 9 :** Sans les calculer, comparer les sinus et les cosinus des réels suivants

$$\frac{\pi}{8} \text{ et } \frac{3\pi}{8} \qquad \frac{5\pi}{8} \text{ et } \frac{7\pi}{8} \qquad \frac{6\pi}{7} \text{ et } \frac{7\pi}{8} \qquad -\frac{\pi}{8} \text{ et } -\frac{3\pi}{8}$$

▸ **Exercice 10 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

▸ **Exercice 11 :** Soit $k \in]0;+\infty[$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$, définie sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\pi}{k}$-périodique.

▸ **Exercice 12 :** On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x)+x$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

$f_3 : x \mapsto \cos(e^x)$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto (\sin(x))^3$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \ln(1+\cos(x)^2)$

▸ **Exercice 13 :** Le but de cet exercice est de prouver d'une nouvelle manière que pour tout réel x, $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1$.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = (\cos(x))^2+(\sin(x))^2$.

1. Que vaut $f(0)$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Conclure.

▸ **Exercice 14 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = x+\cos(x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.

▸ **Exercice 15 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-\pi,\pi]$ par $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$. Étudier les variations de f sur $[-\pi,\pi]$ puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

▸ **Exercice 16 :** Pour tout réel $x \neq 0$, on note $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. $f(x)$ est appelé *sinus cardinal de* x.

1. Donner le domaine de dérivabilité de f et calculer sa dérivée.
2. En remarquant que $\dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

▸ **Exercice 17 :** Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$

▸ **Exercice 18 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \cos\left(e^{-x^2}\right)$

1. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout réel x, $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1$
4. En déduire que pour tout réel x, $\sin(e^{-x^2}) \geqslant 0$
5. En déduire le tableau de variations de f.

▸ **Exercice 19 :** On admet que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$. Donner une primitive de ces fonctions.

- $f_1 : x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(5x)$
- $f_2 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
- $f_3 : x \mapsto 2x\cos(x^2)$
- $f_4 : x \mapsto 4\sin(6x - 1)$

▸ **Exercice 20 :** Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$ et $g(x) = \sin(\ln x)$. Montrer que f est une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

▸ **Exercice 21 :** Soit f la fonction définie pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin(x)$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire que l'équation $\sin(x) = x$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Quelle est-elle ?

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

3 Exercice de synthèse : Fonction tangente

▶ **Exercice 22 :** : Pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on appelle tangente de x, noté $\tan(x)$, le réel :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Partie A : Quelques valeurs

1. Que valent $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$?
2. On considère un réel $x\in\left]-\pi;\frac{-\pi}{2}\right[$ tel que $\sin(x)=-\frac{11}{61}$.
   (a) Que vaut $\cos(x)$?
   (b) Que vaut $\tan(x)$?
3. Résoudre l'inéquation $\tan(x)\leqslant 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Un peu d'étude de la tangente

On considère la fonction $x\mapsto\tan(x)$, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que la fonction tan est impaire.
2. Montrer que pour tout réel $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $1+(\tan(x))^2=\frac{1}{(\cos(x))^2}$
3. Justifier que tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et que tan est solution de l'équation différentielle $y'=1+y^2$ sur cet intervalle.
4. En déduire le sens de variation de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
5. Justifier que tan est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer les intervalles de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur lesquels cette fonction est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthogonal
7. Déterminer l'unique primitive de tan sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut 0 en 0.