Vers la terminale générale

1 Second degré

Propriété 1 : Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son **discriminant**.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle (l'équation $ax^2+bx+c=0$ ne possède aucune solution réelle). Pour tout réel x, ax^2+bx+c est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, on a alors, pour tout réel x

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

  et le polynôme possède une racine dite double, $-\dfrac{b}{2a}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, posons alors

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Dans ce cas, pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

  x_1 et x_2 sont les deux racines du polynôme ax^2+bx+c. On en déduit le **tableau de signes** de $ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$		Racine 1		Racine 2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

► **Exercice 1 :** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

$2x^2 - 4x + 1 = 0$

$3x^2 + 5x + 7 = 0$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$5x(x + 2) = 15$

$3x^2 + 3x - 7 = x^2 - 2x$

$x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$

$(2x^2 - 3x - 4)(4x + 7) = 0$

▶ **Exercice 2 :** Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un tableau de signes

$x^2 - 5x + 6 > 0$ $\qquad$ $5x^2 + x - 4 \leqslant 3x^2 - 2x + 1$

$-5x^2 + 6x - 1 \geqslant 0$ $\qquad$ $-8x^2 + 7x - 4 > 0$

2 Fonctions et dérivation

2.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.

- On dit que f est **dérivable** en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée "nombre dérivé de f en a" et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors **fonction dérivée** de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

▶ **Exercice 3 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit h un réel non nul.

1. Calculer $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée.

2.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$mx + p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2.3 Opérations sur les dérivées

Propriété 2 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions $k\,u$, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est également dérivable. On a de plus

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

► **Exercice 4 :** Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto 3x^2 - 9x + 4$ $\quad f_2 : x \mapsto \sqrt{2}x^9 + 8x^7 + 3x^2$ $\quad f_3 : x \mapsto \frac{3}{x} - x^2$

$f_4 : x \mapsto \pi x^5 + 3x - \frac{2}{x}$ $\quad f_5 : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$ $\quad f_6 : x \mapsto 5x + \sqrt{x}$

$f_7 : x \mapsto x^7 + \frac{5}{x^7}$ $\quad f_8 : x \mapsto x^4 + 3\sqrt{3} - \frac{1}{2x}$ $\quad f_9 : x \mapsto \frac{x^8 + x^5 + x^2}{x^3}$

► **Exercice 5 :** Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto x\sqrt{x}$ $\quad f_2 : x \mapsto (x^2+3)(x+1)$

$f_3 : x \mapsto (3-x^2)(x^3-5)$ $\quad f_4 : x \mapsto (2x+x^3)(3x-5x^7)$

$f_5 : x \mapsto \frac{2x}{3x^2+1}$ $\quad f_6 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

$f_7 : x \mapsto \frac{2x}{3x-9}$ $\quad f_8 : x \mapsto 5x + \frac{1}{3x+2}$

$f_9 : x \mapsto \frac{x^2-3}{x^3-1}$ $\quad f_{10} : x \mapsto x^2 \times \frac{2x+5}{3x-2}$

Propriété 3 : Soit I un intervalle. Soit m et p deux réels, avec $m \neq 0$ et u une fonction définie et dérivable sur I. Alors la fonction $g : x \mapsto u(mx+p)$ est dérivable sur l'ensemble des x tels que $mx + p \in I$, de dérivée

$$u' : x \mapsto m \times u'(mx+p)$$

▶ **Exercice 6 :** Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto (4x+7)^2$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2x-5}$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto (7x-8)^3$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{3x-2}$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto (6-2x)^4$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \dfrac{-4}{(x+7)^2}$

2.4 Application de la dérivation

Propriété 4 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$
- f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$
- f est **constante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$

▶ **Exercice 7 :** On considère la fonction $f : x \mapsto 5x^2 + 2x + 3$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f'.
3. En déduire le tableau de variations de f.

▶ **Exercice 8 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

▶ **Exercice 9 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5x+10}{3x}$. On admet que f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

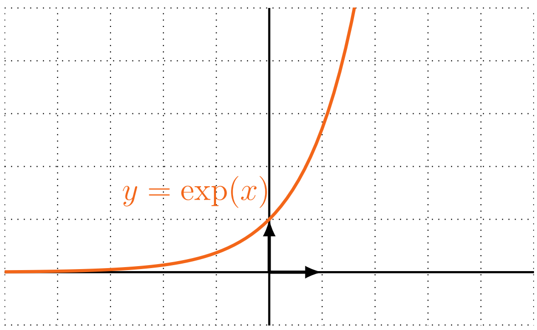
1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de variations de f.
3. Quels sont les extremums locaux de la fonction f ?

2.5 Fonction exponentielle

Définition 2 : On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction, notée exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\exp(0) = 1$
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$

On note $e = \exp(1)$. On notera par ailleurs, pour tout réel x, $e^x = \exp(x)$



▶ **Exercice 10 :** Pour chacune des fonctions suivantes, dérivables sur les intervalles mentionnés, donner une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto 3x^2 + 2 + \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 6e^x$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$f_4 : x \mapsto x\, \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{x^2}{\exp(x) - 1}$ sur $]0; +\infty[$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x\, e^x}$ sur $] - \infty; 0[$

Propriété 5 : Soit a et b deux réels. La fonction $f : x \mapsto \exp(ax + b)$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = a \times \exp(ax + b)$.

▶ **Exercice 11 :** Pour chacune des fonctions suivantes, dérivables sur les intervalles mentionnés, donner une expression de la fonction dérivée.

$f_1 : x \mapsto \exp(9x - 7)$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto e^{8-5x}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto (2x + 1)\exp(2x + 3)$ sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto x^2\, e^{4x-1}$ sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\exp(-2x + 3)}{x^2 - 1}$ sur $] - 1; 1[$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^{-3x}}{x}$ sur $] - \infty; 0[$

Propriété 6 : Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$ (en particulier, **l'exponentielle ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$). La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs,

- Pour tout réel x , $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- Pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x\, e^y$ et $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
- Pour tout réel x et tout entier relatif n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

▶ **Exercice 12 :** Soit x et t des réels. Simplifier les écritures suivantes.

$e^{3x+1} \times e^{5x+2}$

$(e^{2t-4})^5$

$\dfrac{e^{2x+5}}{e^{4x+7}}$

$\dfrac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}$

$\dfrac{e^{7-2t}}{e^{3t+4} \times e^{-4t+1}}$

$\dfrac{e^{2x+3t} \times e^{4x-5t}}{e^{2t+8x}}$

▶ **Exercice 13 :** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{4x-5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel, que vaut $f'(x)$?
2. En déduire le signe de f' et les variations de f.
3. Tracer une allure possible de la courbe de f dans un repère orthogonal.

▶ **Exercice 14 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (-x + 2)\, e^x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-x + 1)\, e^x$
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.
3. Où la fonction f atteint-elle son maximum ?

3 Suites

3.1 Généralités

Définition 3 : Une *suite numérique* u est une fonction définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

La suite u est également notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n)

On dit qu'une suite (u_n) est définie par récurrence (d'ordre 1) lorsqu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Autrement dit, tout terme de la suite se construit à partir du terme précédent.

▶ **Exercice 15 :** Pour chacune des suites numériques suivantes, calculer les termes de rang 0, 1, 2 et 3 de la suite (u_n).

$$u_n = -7n + 2 \qquad u_n = n^2 - 1 \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 256 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = -3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$$

3.2 Suites arithmétiques

Définition 4 : Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la "raison" de la suite.

▶ **Exercice 16 :** Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $r = 4$. Calculer u_1, u_2 et u_5.

▶ **Exercice 17 :** On considère (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = \dfrac{2}{5}$ et de raison $r = -\dfrac{1}{3}$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Propriété 7 : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

► **Exercice 18 :** Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $r = 7$.
1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. En déduire la valeur de u_{2021}

► **Exercice 19 :** Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = \frac{1}{5}$ et de raison $r = -2$.
1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. En déduire la valeur de u_{2021}

3.3 Suites géométriques

Définition 5 : Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est appelé la "raison" de la suite.

Propriété 8 : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = q^n \times u_0$$

► **Exercice 20 :** Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.
1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. En déduire la valeur de u_{10}

► **Exercice 21 :** Soit (u_n) une suite géométrique de terme initial $u_0 = \frac{2}{3}$ et de raison $r = -1$.
1. Calculer u_1 et u_2
2. Exprimer u_n en fonction de n
3. En déduire la valeur de u_{2021}

► **Exercice 22 — Bonus. :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$.
1. Calculer u_1 et u_2
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = u_n - 10$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$
   (b) Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n
   (d) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n

4 Géométrie

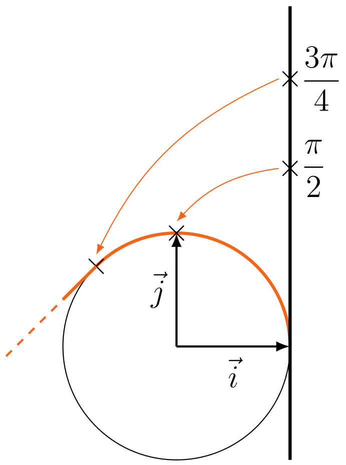
4.1 Trigonométrie

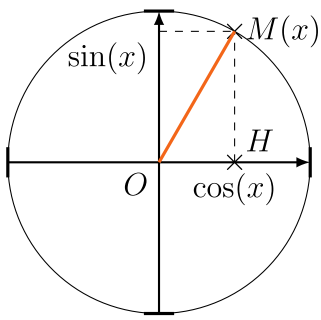
Définition 6 : On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour du cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.

Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

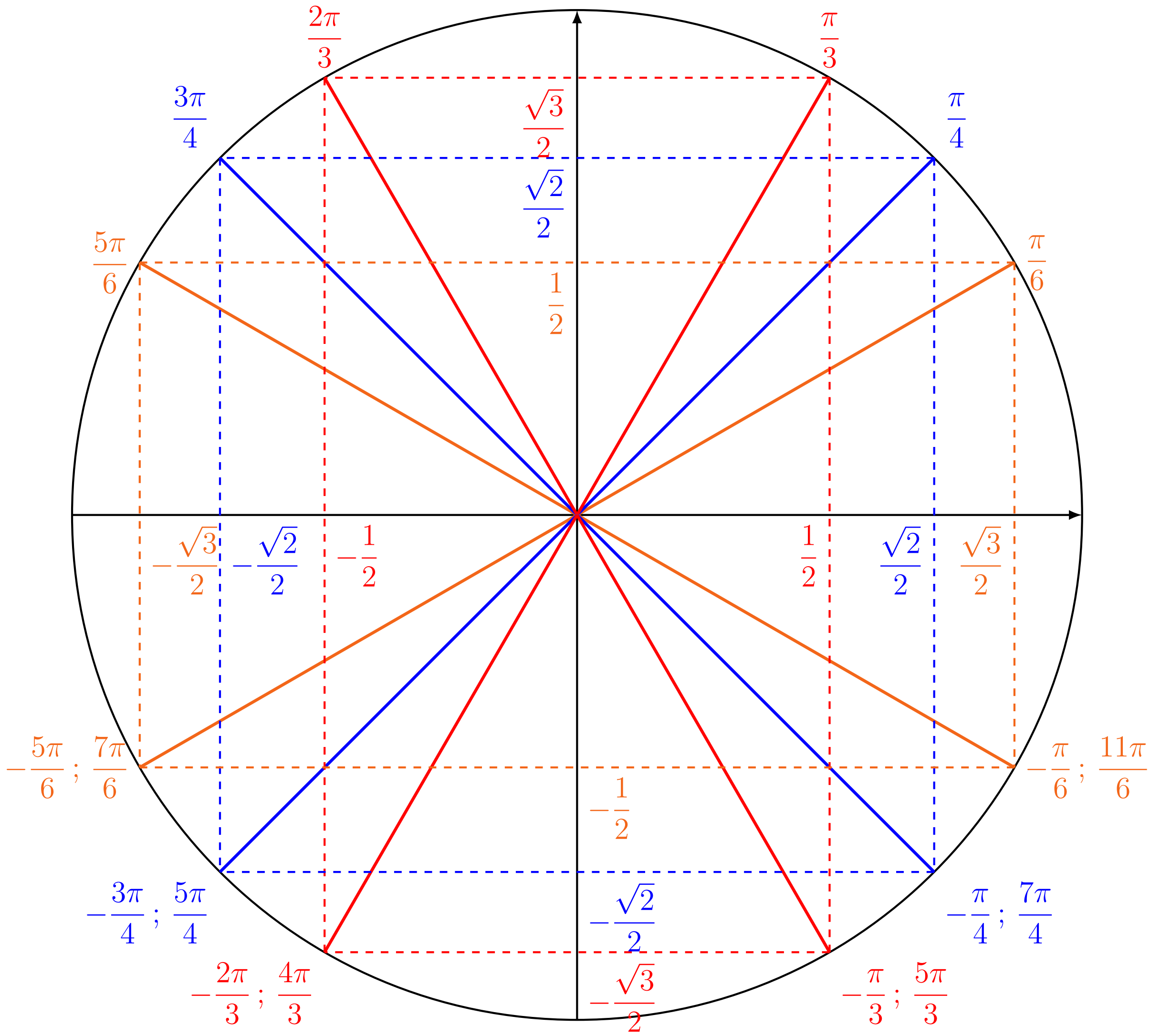
- **Cosinus** de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$
- **Sinus** de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$



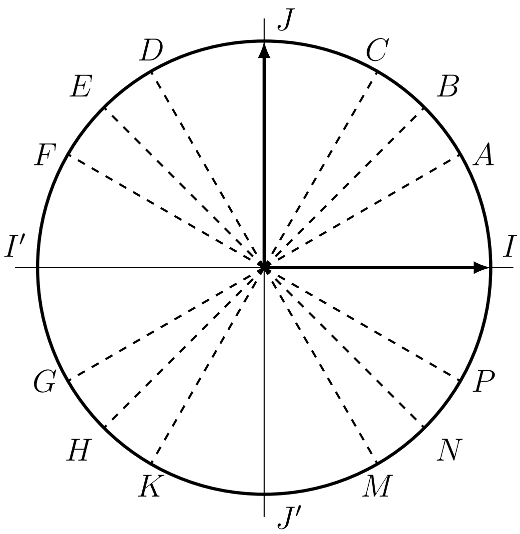


On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



▸ **Exercice 23 :** On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants

π	2π	-3π	18π
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{17\pi}{2}$	$\dfrac{-7\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{-5\pi}{3}$	$\dfrac{8\pi}{3}$
$\dfrac{-7\pi}{4}$	$\dfrac{19\pi}{3}$	$\dfrac{-37\pi}{6}$	$\dfrac{23\pi}{4}$

▶ **Exercice 24 :** En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

4.2 Produit scalaire dans le plan

Définition 7 : Soient A, B, C et D trois points du plan, A et B étant distincts. Soit H et K les projetés orthogonaux des points C et D sur la droite (AB). Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est le réel

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK} = \begin{cases} AB \times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de même sens,} \\ -AB \times HK & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HK} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

Propriété 9 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$

▶ **Exercice 25 : Choisir la bonne formule...** Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

1. $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 7$, $||\vec{u}+\vec{v}|| = 9$
2. $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = \sqrt{3}$, $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$
3. ABC triangle équilatéral de côté de longueur a, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
4. $ABCD$ est un carré de côté de longueur a, I est le milieu de $[AB]$, $\vec{u} = \overrightarrow{DI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$
5. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 9$ et $AC = 11$. $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$

Propriété 10 : Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un **repère orthonormé**, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dont les coordonnées sont exprimées selon ce repère.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Définition 8 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Deux droites du plan D et D', de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► **Exercice 26 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

$$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}4\\-10\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_5}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u_6}\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v_6}\begin{pmatrix}14\\4\end{pmatrix}$$

► **Exercice 27 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère les points $A(-2,2)$, $B(4,4)$, et $C(-3,5)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

► **Exercice 28 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $y = 3x - 7$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 23$.

1. Donner un vecteur directeurs pour ces deux droites.
2. En déduire que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires.

► **Exercice 29 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Soit x un réel.

1. A quelle condition sur le réel x les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2x+1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\8x+2\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
2. A quelle condition sur le réel x les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3x+2\\2x+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5x-1\\2x-7\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

4.3 Géométrie repérée

Définition 9 : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, de vecteur directeur $\vec{u}$. On dit que $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à la droite $\mathcal{D}$ si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.
Autrement dit, la direction de $\vec{n}$ est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$

Propriété 11 : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, d'équation $ax+by+c = 0$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.

Réciproquement, soit a, b et c trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. L'ensemble des points de coordonnées (x,y) vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

► **Exercice 30 :** Donner un vecteur normal pour chacune des droites suivantes, dont on a donné une équation cartésienne dans un repère orthonormé

$d_1 : 3x + 2y - 5 = 0$	$d_2 : 5x - 3y + 9 = 0$	$d_3 : 6y - 2x + 1 = 0$
$d_4 : 5x = 2y - 1$	$d_5 : y = 2x + 7$	$d_6 : x = 2$

▶ **Exercice 31 :** Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1;7)$ admettant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.

Définition 10 : Soit A un point du plan et r un réel positif. Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = r$.

Propriété 12 : Soit $A(x_A;y_A)$ un point du plan et r un réel positif. Le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r si et seulement si

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** du cercle $\mathcal{C}$.

▶ **Exercice 32 :** Donner l'équation du cercle de centre $B(-2;7)$ de rayon 2.

▶ **Exercice 33 :** On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $(x-5)^2+(y+1)^2=81$. Quel est son centre ? Quel est son rayon ?

▶ **Exercice 34 :** On considère le point $D(1;3)$ et le points $E(-2;7)$. Donner une équation du cercle de centre D passant par E.

5 Probabilités

5.1 Probabilités conditionnelles

Définition 11 : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant** A, la quantité

$$\mathbb{P}_A(B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

▶ **Exercice 35 :** On tire un nombre au hasard, de manière uniforme dans l'univers $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. On considère les événements suivants :

- A : le nombre tiré est impair
- B : le nombre tiré est supérieur ou égal à 6
- C : le nombre tiré est un nombre premier

1. Que valent $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$?
2. Que valent $\mathbb{P}(A\cap B)$, $\mathbb{P}(A\cap C)$ et $\mathbb{P}(B\cap C)$?
3. Que valent $\mathbb{P}_A(B)$, $\mathbb{P}_C(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_C(A)$?

▶ **Exercice 36 :** 120 personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobaye pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. Parmi ces personnes, 75% ont reçu le véritable traitement. Les personnes restantes ont reçu un placebo (un "faux" traitement). Les deux tiers des personnes ayant pris le médicament ont senti une amélioration. Seules 5 personnes ayant reçu le placebo sont dans ce cas.

1. Compléter le tableau suivant à l'aide des effectifs.

	Traitement	Placebo	Total
Amélioration			
Pas d'amélioration			
Total			

2. On sélectionne uniformément au hasard une des personnes de ce test. On note T l'événement "le patient a reçu le traitement" et A l'événement "le patient a constaté une amélioration de sa santé".
   (a) Décrire par une phrase l'événement $T \cap A$.
   (b) Que vaut $\mathbb{P}(T \cap A)$?
   (c) Que valent $\mathbb{P}_T(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}(A)$?
   (d) Que vaut $\mathbb{P}_A(\overline{T})$?
   (e) Le médicament vous semble-t-il efficace ? Justifier.

Définition 12 : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont non vides
- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

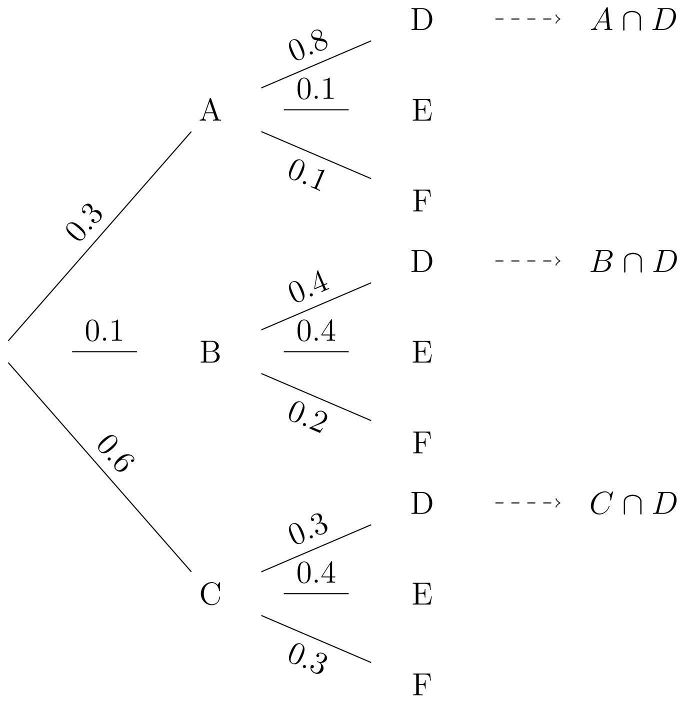
Propriété 13 : (Formule des probabilités totales) On considère un événement B et une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers Ω. Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n) \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) \right)$$

De manière équivalente, on a

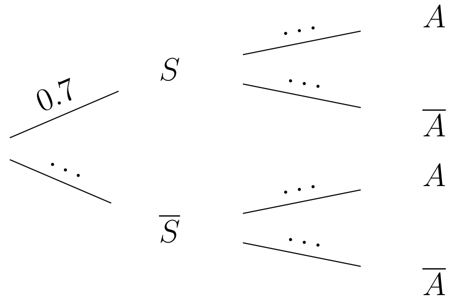
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_{A_1}(B)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}_{A_2}(B)\mathbb{P}(A_1) + \ldots + \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n) \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i) \right)$$

▶ **Exercice 37 :** Dans la situation représentée par l'arbre pondéré suivant, déterminer $\mathbb{P}(D)$.



▶ **Exercice 38 :** Le filtre anti-spam des boîtes mails utilise les probabilités conditionnelles pour déterminer si, oui ou non, le mail reçu est indésirable. Pour cela, le filtre va, par exemple, analyser les mots du mail et rechercher certains mots-clés apparaissant souvent dans les spams.
Nous étudions une version très simplifiée : on note A l'événement "le mot Argent figure dans le mail" et S l'événement "le mail est un spam". Le courrier est classé en indésirable si $\mathbb{P}_A(S) \geqslant 0.9$.
On suppose que 70% des spams contiennent le mot argent, que 20% des non-spams contiennent le mot argent.

1. D'après l'énoncé, que valent $\mathbb{P}_S(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{S}}(A)$?



2. On suppose que 70% des mails sont des spams. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
3. Que valent $\mathbb{P}(A \cap S)$ et $\mathbb{P}(A \cap \overline{S})$? En déduire $\mathbb{P}(A)$.
4. En revenant à la définition des probabilités conditionnelles, calculer $\mathbb{P}_A(S)$. Un mail contenant le mot "argent" est-il considéré comme un spam dans ce modèle ?

5.2 Variable aléatoire

Définition 13 : On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires sont en général notées X.

La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k, associe la probabilité de l'événement $\mathbb{P}(X = k)$.

► **Exercice 39 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée ci-dessous.

k	-2	1	2	3	5	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

1. A l'aide du tableau, déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 3)$.
2. Quelles valeurs prises par la variable X remplissent la condition $X \geqslant 2$?
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$.
4. De la même manière, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$

► **Exercice 40 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans un tableau.

k	-2	0	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.3	p	0.2

1. Déterminer la valeur du réel p pour que l'on ait effectivement une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

► **Exercice 41 :** Dans une urne, on place 7 boules vertes, 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule au hasard : si la boule est bleue, on gagne 3 euros. Si elle est rouge, on gagne 1 euro, sinon, on perd un euro. On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce tirage. Donner la loi de probabilité de la variable X.

Définition 14 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X.
Pour i allant de 1 à n, on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. **L'espérance** de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n \qquad \left(\text{ce qui se note aussi } \sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right)$$

L'espérance représente la "valeur moyenne" de la variable aléatoire X

► **Exercice 42 :** Donner l'espérance de la variable aléatoire X, dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	1	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	0.4	0.2	0.1	0.2

▶ **Exercice 43 :** On place 1 boule blanche et n boules noires dans une urne. On tire au hasard une boule dans cette urne. Si elle est blanche, on gagne 10 euros. Sinon, on perd 1 euro. On note X la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur, positif ou négatif.

1. Quelle est, en fonction de n, la probabilité de tirer une boule blanche ?
2. Construire la loi de probabilité de X
3. Calculer $E[X]$ en fonction de n
4. On dit que le jeu est équitable si $E[X] = 0$. Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?