Nombres complexes : forme algébrique

Un peu d'histoire

Vous avez l'an dernier appris à résoudre les équations du second degré, ou du moins, le pensiez-vous... Les mathématiques sont pleines de surprises !

Au XVIe siècle de notre ère, les mathématiciens aiment se lancer des défis : par exemple, il pouvait s'agir d'équations du troisième degré à résoudre. A l'époque, on ne résolvait ces équations que de manière approchée, en y allant à tâtons, avec des pas de plus en plus petits.

Cependant, en 1535, lors d'un concours de résolution d'équations, un dénommé Niccolo Fontana Tartaglia parvient à déterminer les solutions de 30 d'entre elles de manière exacte. Tartaglia ne dévoilera toutefois pas sa formule tout de suite : le malin mathématicien souhaite en effet la garder secrète pour pouvoir l'utiliser lors de prochains concours, sans laisser de chance à ses adversaires.

C'est un autre Italien, Girolamo Cardano (ou Jérôme Cardan), qui invite alors Tartaglia chez lui, à Milan, et le persuade de lui dévoiler sa formule magique, tout en lui promettant de ne la dévoiler à personne et encore moins de la publier.

Mais en 1545, Cardan apprend que cette formule était en réalité déjà connue d'un autre mathématicien, Scipione del Ferro. Cardan juge alors caduque la promesse faite à Tartaglia et s'empresse de publier la formule de résolution des équations du troisième degré dans son ouvrage, Ars Magna.

Étant donné une équation de la forme $x^3 = px + q$, une solution est la suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Si l'on applique cette formule à l'équation $x^3 = 15x + 4$, on obtient alors comme solution

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

qui fait notamment apparaître une racine carrée d'un nombre négatif !

Mais Cardan s'en fiche, et il continuera ses calculs comme si de rien n'était... C'est la naissance des nombres complexes – bien qu'on ne les appelle pas encore ainsi.

Les nombres complexes seront développés plus tard par Rafaele Bombelli, qui poursuivra les travaux de Cardan et étudiera les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$

Ce n'est que plus tard, en 1777, que le mathématicien suisse Leonhard Euler remplace l'affreuse notation $\sqrt{-1}$ par la lettre i, initiale du mot *imaginaire*.

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition 1 : Il existe un ensemble de nombres appelé **nombres complexes** et noté $\mathbb{C}$ tel que

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$
- Il existe un nombre complexe, noté i, et tel que $i^2 = -1$
- L'addition et la multiplication des réels se prolonge "naturellement" dans l'ensemble des complexes
- Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (a,b) tel que $z = a + ib$.
  - a est appelée **partie réelle** de z, notée $Re(z)$.
  - b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$.
  - L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z.

■ **Exemple 1 :** $2 + 3i$, $7i$, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}i$ sont des nombres complexes. ■

L'addition et la multiplication de complexes se passent comme pour les nombres réels. Le nombre i joue le rôle de facteur. Il ne faut toutefois pas oublier que $i^2 = -1$, notamment pour la multiplication.

■ **Exemple 2 :** Soit $z = 2 + 5i$ et $z' = 1 - 3i$. Alors

$$z + z' = 2 + 5i + 1 - 3i = 3 + 2i$$

et

$$zz' = (2 + 5i)(1 - 3i) = 2 \times 1 + 5i \times 1 + 2 \times (-3i) + 5i \times (-3i) = 2 + 5i - 6i - 15i^2 = 17 - i$$

■

Propriété 1 : Soit z un nombre complexe.

$$z = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad Re(z) = 0 \text{ et } Im(z) = 0$$

Démonstration 1.1 : D'une part, si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$, alors $z = Re(z) + i \times Im(z) = 0 + i0 = 0$.

D'autre part, si $z = 0$, notons a et b les parties réelles et imaginaires de z. Ainsi, $a + ib = 0$. Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer que nécessairement, a et b valent tous deux 0. Pour cela, nous allons supposer le contraire et aboutir à une absurdité, ce qui nous permettra de conclure que l'hypothèse faite au départ était fausse.

Supposons donc que soit a, soit b ne soit pas nul.

- Si $b = 0$, puisque $a + ib = 0$, on obtient également que $a = 0$, ce qui est contraire à ce que nous avons supposé. Ainsi, on a forcément $b \neq 0$.
- Si $b \neq 0$, alors, puisque $a + ib = 0$, on a donc $i = -\frac{a}{b}$. i serait donc réel. C'est absurde.

Ainsi, $a = b = 0$ □

Propriété 2 : Soit z et z' deux complexes. Alors

$$z = z' \quad \text{si et seulement si} \quad Re(z) = Re(z') \text{ et } Im(z) = Im(z')$$

Démonstration 1.2 : Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a $z = z'$ si et seulement si $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a - a' + i(b - b') = 0$. D'après le premier point, c'est équivalent à dire que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$.

Finalement, $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. □

Cette propriété nous permet notamment de résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

■ **Exemple 3 :** Résoudre l'équation $2z + i - 3 = 5i + 4z - 7$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 2z + i - 3 = 5i + 4z - 7 &\Leftrightarrow 2z - 4z = 5i - 7 + 3 - i \\ &\Leftrightarrow -2z = -4 + 4i \\ &\Leftrightarrow z = 2 - 2i \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{2 - 2i\}$. ■

Définition 2 : Soit z un nombre complexe

- z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
- Si $Re(z) = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur. On note $z \in i\mathbb{R}$.

2 Conjuqué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés

Définition 3 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et qui vaut

$$\overline{z} = a - ib$$

■ **Exemple 4 :** Le conjugué de $7 + 3i$ est $7 - 3i$.
Le conjugué de $2i$ est $-2i$. ■

Propriété 3 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

Démonstration 2.1 — Premier point. : Soit $z = a + ib$ avec a et b des réels. On a donc $\overline{z} = a - ib$

- Si $z = \overline{z}$, alors $a + ib = a - ib$ ce qui implique que $2ib = 0$ et donc $b = 0$. z est donc réel.
- Si z est réel, alors $b = 0$. Ainsi, $z = a$ et $\overline{z} = a$. On a bien $z = \overline{z}$.

□

La démonstration du deuxième point fait l'objet d'un exercice.

Propriété 4 : Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Démonstration 2.2 : Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z$.
- $\overline{z+z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = z - z'$
- D'une part,

  $$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b + i^2bb' = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$$

  D'autre part,

  $$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

  On a bien $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

□

Propriété 5 : Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. Alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration 2.3 : Soit z un nombre complexe. Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, on a $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
  Or, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$. La propriété précédente nous assure donc que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z}$.
  Or, par hypothèse de récurrence, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
  Ainsi, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

□

2.2 Résolution d'équation en z et $\overline{z}$

Lorsque des équations font intervenir z et $\overline{z}$, il est préférable d'écrire ces nombres sous forme algébrique, puis d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

■ **Exemple 5 :** On souhaite résoudre l'équation $(E)\ :\ 2z + 3i - 5 = 3i\overline{z} - 2i + 5$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

On pose alors $z = a + ib$. On a donc $\overline{z} = a - ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2z + 3i - 5 = 3\overline{z} - 2i + 7 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(a + ib) + 3i - 5 = 3i(a - ib) - 2i + 5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a + 2ib + 3i - 5 = 3ia + 3b - 2i + 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a - 3b - 5 - 5 + i(2b + 3 - 3a + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a - 3b - 10 + i(2b - 3a + 5) = 0
\end{aligned}$$

Or, un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaires sont nulles. On obtient donc le système suivant

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a - 3b - 10 & = & 0 \\ -3a + 2b + 5 & = & 0 \end{array} \right.$$

On peut alors résoudre ce système avec la méthode de son choix. Par exemple, en procédant par combinaison. On multiplie la première ligne par 3 et la deuxième par 2.

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6a - 9b - 30 & = & 0 \\ -6a + 4b + 10 & = & 0 \end{array} \right.$$

On remplace L_2 par $L_2 + L_1$

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6a - 9b - 30 & = & 0 \\ -5b - 20 & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient donc

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6a - 9 \times (-4) - 30 & = & 0 \\ b & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6a + 6 & = & 0 \\ b & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -4 \end{array} \right.$$

On a donc $S = \{-1 - 4i\}$. ■

3 Division dans $\mathbb{C}$

Définition 4 : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique complexe z' tel que $zz' = 1$. z' est appelé inverse de z et est noté $\dfrac{1}{z}$.

■ **Exemple 6 :** $(1+2i)\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i\right) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i - \dfrac{2}{5}i + \dfrac{4}{5} = 1$. On a donc $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i = \dfrac{1}{1+2i}$. ■

Définition 5 : Soit z un complexe et $\overline{z}$ un complexe non nul. On définit le quotient de z par z' par :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

■ **Exemple 7 :** Calculons $\dfrac{3+i}{1+2i}$. On a

$$\frac{3+i}{1+2i} = (3+i) \times \frac{1}{1+2i}$$

Or, d'après l'exemple précédent, $\dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$. Ainsi,

$$\frac{3+i}{1+2i} = (3+i)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i + \frac{i}{5} - \frac{2}{5}i^2 = 1 - i$$

■

Dans un précédent exercice sur les conjugués, nous avons pu exprimer le produit $z\overline{z}$ et constater que ce produit était en fait un réel.

Pour mettre sous forme algébrique un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. Ainsi, le dénominateur du quotient obtenu sera un nombre réel.

■ **Exemple 8 :** On souhaite exprimer $\dfrac{4+3i}{3-i}$ sous forme algébrique. Le dénominateur est $3-i$, dont le conjugué est $3+i$. On multiplie donc numérateur et dénominateur par $3+i$.

$$\frac{4+3i}{3-i} = \frac{(4+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+9i+3i^2}{3^2-i^2} = \frac{12+13i-3}{9-(-1)} = \frac{9}{10} + \frac{13}{10}i$$

■

Propriété 6 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul. Alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \quad \text{et} \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Démonstration 3.1 : Soit z un complexe non nul. D'après la propriété sur le produit des conjugués, on a

$$\overline{z} \times \overline{\frac{1}{z}} = \overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1} = 1$$

et donc

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Par ailleurs,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$$

d'après la proposition sur le conjugué du produit. Mais alors, d'après la propriété précédemment démontrée,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

□