Exercices : Nombres complexes (1)

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

▶ Exercice 1

Exprimer les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$1 + 2i - 4i + 7 - 3i^2$ $\quad (1 + 2i)(5 - 4i)$ $\quad \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}i\right)$

$(5 + 3i)(10 - 6i)$ $\quad (2i)^{10}$ $\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$

▶ Exercice 2

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$z + 2i - 4 = 5i + 3$ $\quad \frac{z - 4i}{3} = \frac{1}{2} + 5i$ $\quad (3 + 2i)z + i - 5 = 1 + 5i$

$(z - 3 + i)(2z - 5i) = 0$ $\quad \frac{z + 1 + i}{1 - z} = 0$ $\quad \frac{z - 3i + 1}{z - 3} = \frac{1}{4}$

▶ Exercice 3

Résoudre les système suivants, d'inconnues complexes z_1 et z_2.

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 &= 5 - 3i \\ z_1 - 3z_2 &= 4 + 6i \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 &= 1 + 2i \\ z_1 - 2z_2 &= 2 + i \end{cases}$$

▶ Exercice 4

On s'intéresse au cas de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Cette équation admet-elle des solutions réelles ?

Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

2. Montrer que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$
3. On admet qu'il existe un complexe a tel que pour tout complexe z, on ait $z^2 + z + 1 = (z - j)(z - a)$. Déterminer la valeur de a et en déduire les solutions de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$

▶ Exercice 5

Soit x un réel et $z = 2x + 1 + i(x^2 + 5x - 4)$

1. Déterminer la valeurs de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

▶ Exercice 6

On considère la fonction f définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. On notons $z = a + ib$. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de a et b.
2. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

2 Conjugué d'un nombre complexe

▶ Exercice 7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Exprimer le produit $z\overline{z}$ en fonction de a et b.

▶ Exercice 8

Démontrer la propriété du cours suivante : Soit $z \in \mathbb{C}$. $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = -z$.

▶ Exercice 9

Soit z un nombre complexe.

1. Montrer que $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
2. Trouver et démontrer une relation similaire pour exprimer $Im(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

▶ Exercice 10

On considère le complexe $z = (1 - 3i)(5 + 4i)(1 + 3i)(10 - 8i)$. Sans calcul, montrer que $z \in \mathbb{R}$.

▶ Exercice 11

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$2z + 3 = 3\overline{z} + 4 - i$	$2z - 4\overline{z} = 6 - 3i$	$z + \overline{z} = 3 + 4i$
$\overline{z} = iz$	$2z + 4 + i = (3 + i)\overline{z} + 2 - 3i$	$\overline{z} - 1 = z\overline{z} - i$

▶ Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + 1 = 0$.

3 Division dans $\mathbb{C}$

▶ Exercice 13

Ecrire les nombres suivants sous forme algébrique.

$$\frac{1}{i} \qquad \frac{1}{1+i} \qquad \frac{2}{4-5i} \qquad \frac{2i}{i-3} \qquad \frac{1-6i}{2+4i} \qquad \frac{3-2i}{2i-3}$$

▶ Exercice 14

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues complexes z. On exprimera le résultat sous forme algébrique.

$$(1 + 2i)z + 3 = 5 - 4i \qquad (3 - 4i)z + 1 - 3i = 2iz \qquad \frac{z - i}{iz - 1} = \frac{1}{3}$$

► Exercice 15

En utilisant la notation algébrique $z = a + ib$, redémontrer le résultat du cours suivant : si z est un complexe non nul, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

► Exercice 16

Pour tout complexe z différent de 1, on pose $f(z) = \frac{2 - iz}{1 - z}$

1. Montrer que $f(z)$ ne peut pas être égal à i.
2. Soit Z un complexe différent de i. Déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de Z par f.

4 Exercices de synthèse

► Exercice 17

Soit z un complexe non nul. Montrer que $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}$ est un réel...

1. ... sans calcul
2. ... avec un calcul

► Exercice 18

Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$.

► Exercice 19

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{z_n - 6}{1 + i}$

1. Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - 6i$
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n.
3. On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \frac{t_n - 6}{1 - i}$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $t_n = \overline{z_n}$
   (b) Sans avoir recours à un nouveau calcul, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

► Exercice 20

On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. Exprimer $f(1 + 2i)$ sous forme algébrique.
2. Montrer que pour tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.
3. Soit Z un complexe différent de 1. Déterminer l'unique antécédent de Z par f.
4. Soit x un réel. Montrer que $f(x) \times \overline{f(x)} = 1$.
5. Réciproquement, soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z) \times \overline{f(z)} = 1$. Montrer que z est réel.