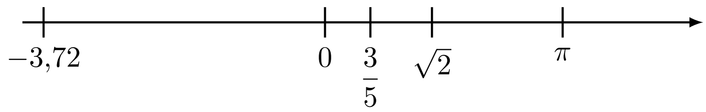
Nombres réels

1 Nombres réels

Définition 1 : L'ensemble des **réels** est l'ensemble des abscisses possibles d'une droite graduée. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$.

■ **Exemple 1 :** $\sqrt{2}$, π, 0, $-3{,}72$, $\dfrac{3}{5}$ appartiennent à $\mathbb{R}$. ■



Définition 2 : On note $\in$ le symbole d'appartenance à un ensemble.

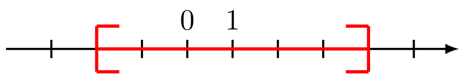
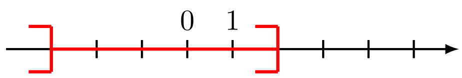
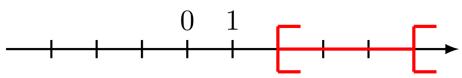
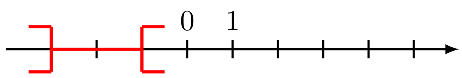
■ **Exemple 2 :** Puisque π appartient à l'ensemble des réels, on note $\pi \in \mathbb{R}$. ■

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

2.1 Intervalle borné

Définition 3 : Un *intervalle borné* est une partie continue de l'ensemble des réels. Il désigne **tous les nombres réels** compris entre deux réels a et b, ces réels pouvant eux-mêmes être inclus ou pas dans l'intervalle. a et b sont appelées **bornes** de l'intervalle.

■ **Exemple 3 :** Les quatre cas d'intervalles bornés...

Réels x tels que...	Représentation graphique	Intervalle
$-2 \leqslant x \leqslant 4$		$[-2\,;\,4]$
$-3 < x \leqslant 2$		$]-3\,;\,2]$
$2 \leqslant x < 5$		$[2\,;\,5[$
$-3 < x < -1$		$]-3\,;\,-1[$

■

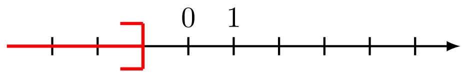
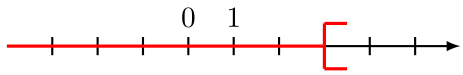
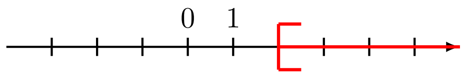
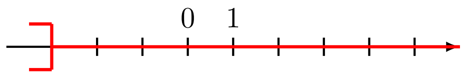
■ **Exemple 4 :** L'intervalle $[1\,;\,2{,}3]$ comporte tous les nombres réels compris entre 1 (inclus) et 2,3 (inclus). Ainsi, le réel 1,8 est dans cet intervalle, alors que le réel 3 n'y est pas. ■

■ **Exemple 5 :** $2 \in [1\,;\,4{,}5[$, $\pi \in [3{,}1\,;\,3{,}2]$ ■

2.2 Intervalle non borné

Définition 4 : Un *intervalle non borné* est une partie continue de l'ensemble des réels qui désigne **tous les nombres réels** inférieurs (ou supérieurs) à un réel donné.

■ **Exemple 6 :** Les quatre cas d'intervalles non bornés...

Réels x tels que...	Représentation graphique	Intervalle
$x \leqslant -1$		$]-\infty\,;\,-1]$
$x < 3$		$]-\infty\,;\,3[$
$x \geqslant 2$		$[2\,;\,+\infty[$
$x > -3$		$]-3\,;\,+\infty[$

■

■ **Exemple 7 :** Le symbole ∞ se lit "infini". L'intervalle $]3\,;\,+\infty[$ désigne tous les réels qui sont strictement supérieurs à 3. Le réel 7 fait partie de ces réels. On a donc $7 \in\,]3\,;\,+\infty[$ ■

■ **Exemple 8 :** L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle non borné: il s'agit de $]-\infty\,;\,+\infty[$ ■

R Attention à ne pas confondre $]3;+\infty[$ avec $[4;+\infty[$. L'intervalle $]3;+\infty[$ désigne TOUS les réels strictement supérieurs à 3, et pas uniquement les entiers. On y trouve 3,1 ou 3,000001...

2.3 Union et intersection d'intervalles

Définition 5 : Soit A et B deux ensembles :

- L'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et B s'appelle **l'intersection** de A et B. On le note $A \cap B$ (se lit A inter B).
- L'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B s'appelle **la réunion** de A et B. On le note $A \cup B$ (se lit A union B)

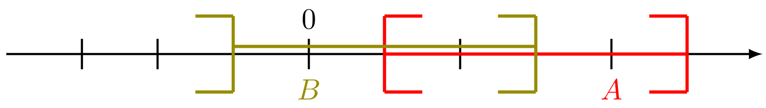
■ **Exemple 9 :** On considère deux intervalles $I = [2\,;\,5[$ et $J = \,]-3\,;\,4]$.

- Puisque $3 \in I$ et $3 \in J$, on a $3 \in I \cap J$.
- On a $0 \in J$ mais $0 \notin J$. Ainsi, $0 \notin I \cap J$. En revanche, puisque 0 appartient à l'un des deux intervalles I et J, on a bien $0 \in I \cup J$.
- Le réel 7 n'appartient ni à l'intervalle I, ni à l'intervalle J. Il n'appartient donc pas non plus à l'union : $7 \notin I \cup J$.

■

■ **Exemple 10 :** Soit $A = [1\,;\,5]$ et $B =]-1\,;\,3[$. Que valent $A \cap B$ et $A \cup B$?

On peut représenter les deux intervalles A et B sur un même axe gradué



L'intersection est l'ensemble des nombres appartenant aux deux intervalles (les deux couleurs à la fois). La réunion est l'ensemble des nombres appartenant à au moins un intervalle.

- $A \cap B = [1\,;\,4[$
- $A \cup B =]-1\,;\,5]$

■

R Il se peut que l'intersection de deux intervalles ne contienne aucun élément : on notera $\varnothing$, qui se lit "ensemble vide".

3 Valeur absolue

3.1 Valeur absolue d'un réel

Définition 6 : Soit x un réel.
On appelle **valeur absolue** de x, notée $|x|$, la distance à zéro de x

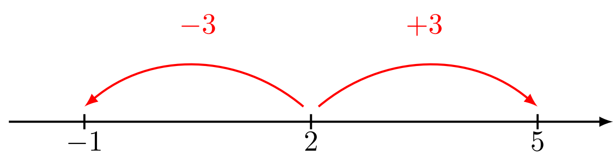
R Si $x \geqslant 0$, on a alors $|x| = x$. Si $x < 0$, on a alors $|x| = -x$.

■ **Exemple 11 :** $|5| = 5$; $|-2| = 2$ ■

Définition 7 : Soit x et y deux réels. On appelle **distance** de x à y la quantité $|x - y|$

■ **Exemple 12 :** La distance de 3 à 5 vaut $|3 - 5| = |-2| = 2$ ■

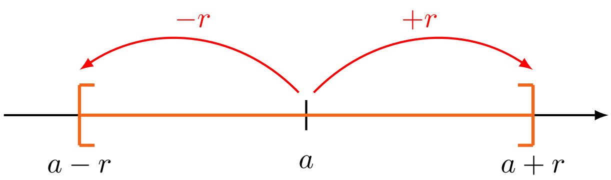
■ **Exemple 13 :** Déterminer tous les réels x tels que $|x - 2| = 3$
Cela revient à trouver tous les réels x qui sont à une distance 3 du réel 2



Les solutions sont -1 et 5. ■

3.2 Lien avec les intervalles

Propriété 1 : Soit a un réel et r un réel positif. L'intervalle $[a-r;a+r]$ correspond exactement aux réels x tels que $|x-a| \leqslant r$.



■ **Exemple 14 :** Les réels x tels que $|x-2| \leqslant 1$ sont les réels qui sont à une distance inférieure ou égal à 1 du réel 2. Il s'agit de l'intervalle $[1;3]$.

L'intervalle $[2;8]$ correspond aux réels x tels que $|x-5| \leqslant 3$. En effet, $2 = 5-3$ et $8 = 5+3$. 5 est la valeur "au milieu" de l'intervalle $[2;8]$. ■

4 Nombres décimaux

4.1 Notion de nombre décimal

Définition 8 : Soit x un nombre réel.

On dit que x est un **nombre décimal** s'il existe deux nombres entiers a et n tels que $x = \dfrac{a}{10^n}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

■ **Exemple 15 :** 12,376 est un nombre décimal. En effet, $12{,}376 = \dfrac{12376}{1000} = \dfrac{12376}{10^3}$.
Ainsi, $12{,}376 \in \mathbb{D}$. ■

■ **Exemple 16 :** Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux. ■

R Les nombres décimaux sont les nombres qui peuvent s'écrire avec "un nombre fini de chiffres après la virgule".

Théorème 4.1 : $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration 4.2 : Supposons que $\dfrac{1}{3}$ est décimal.

Il existe alors deux nombres entiers a et b tels que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$. On a alors $3a = 10^n$, et donc 10^n serait un multiple de 3. Or la somme des chiffres de 10^n vaut 1 : ce n'est donc pas un multiple de 3.

Nous aboutissons à une contradiction : l'hypothèse que $\dfrac{1}{3}$ est décimal n'est pas raisonnable. Ainsi, $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Un tel raisonnement s'appelle **raisonnement par l'absurde**. □

4.2 Encadrement d'amplitude 10^{-n}

Définition 9 : Soit a et b deux réels avec $a < b$. L'amplitude de l'intervalle $[a\,;\,b]$ est la quantité $b - a$.

■ **Exemple 17 :** L'amplitude de l'intervalle $[3\,;\,7]$ vaut $7 - 3$ c'est-à-dire 4. ■

Théorème 4.3 : Soit n un entier.
Tout nombre réel appartient à un intervalle d'amplitude 10^{-n} dont les bornes sont des nombres décimaux.

■ **Exemple 18 :** Le nombre π appartient à l'intervalle $[3{,}14\,;\,3{,}15]$, qui est un intervalle d'amplitude 0,01, soit 10^{-2}. ■