Exercices I : Ensemble des réels

1 Nombres réels

▶ Exercice 1 — Les décimales cachées de π.

π est un nombre particulier que vous avez rencontré au collège, lorsqu'il fallait par exemple calculer le périmètre d'un cercle.

1. Sur une calculatrice, saisir le nombre π. Quelle valeur est affichée ?
2. Calculer la différence entre π et la valeur affichée. Par exemple, si votre calculatrice affiche 3,14159265359, calculez $\pi - 3{,}14159265359$. Que remarque-t-on ?

▶ Exercice 2

Donner un nombre réel compris entre $\dfrac{141}{238}$ et $\dfrac{142}{239}$.

▶ Exercice 3

Sans utiliser la calculatrice, exprimer de la manière la plus simple possible les réels suivants

$A = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{8} + \dfrac{1}{4}$ $\quad B = 16 \times \dfrac{21}{8} - 4$ $\quad C = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{7}$

$D = \dfrac{1}{7} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{6}{7} - \dfrac{1}{3}$ $\quad E = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{14}{9} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{10}{3}$ $\quad F = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{4}$

▶ Exercice 4

Compléter les lignes suivantes avec des parenthèses pour l'égalité soit vraie.

- $2 + 1 - 3 + 5 \times 2 + 7 \times 3 - 1 = 1$
- $3 - 7 \times 2 - 4 \times 4 - 8 = 24$
- $3 \times 4 + 2 \times 3 - 4 \times 5 + 2 \times 7 = 12$

2 Intervalles de $\mathbb{R}$

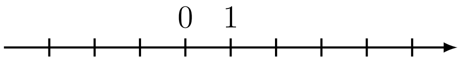
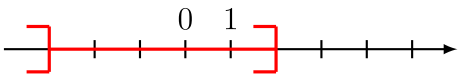
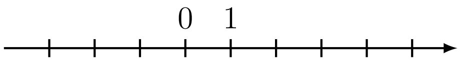
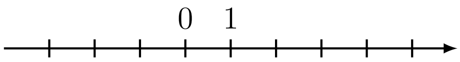
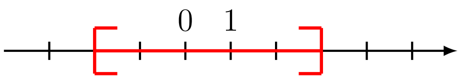
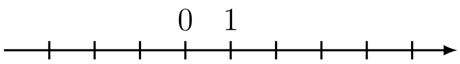
▶ Exercice 5

Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

$2 \ \ldots \ [0\,;5]$	$2{,}2 \ \ldots \ ]2\,;7]$	$3 \ \ldots \ [0\,;3[$
$\dfrac{3}{2} \ \ldots \ ]1\,;2[$	$5{,}2 \ \ldots \ ]5\,;9[$	$-3 \ \ldots \ ]-10\,;-\pi]$
$\dfrac{7}{4} \ \ldots \ [1{,}75\,;3[$	$\dfrac{1}{3} \ \ldots \ ]0{,}3333\,;0{,}5]$	$\dfrac{943215}{943216} \ \ldots \ ]0\,;1[$

► Exercice 6

Compléter le tableau suivant selon le modèle vu dans le cours.

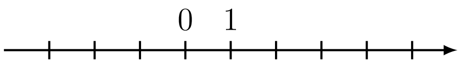
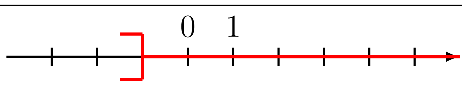
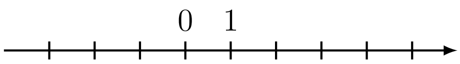
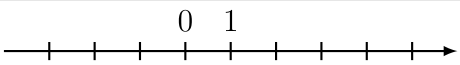
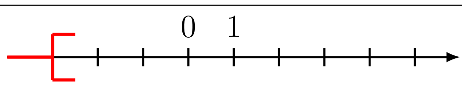
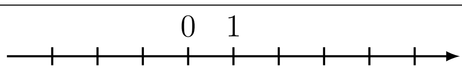
Réels x tels que...	Représentation graphique	Intervalle
$-1 \leqslant x \leqslant 4$		
		
		$]0\,;\,5]$
$-2 < x < 1$		
		
		$[0\,;\,1[$

► Exercice 7

Donner tous les nombres entiers (positifs ou négatifs) de l'intervalle $\left]-\frac{31}{8}\,;\,\frac{19}{7}\right]$.

► Exercice 8

Compléter le tableau suivant selon le modèle vu dans le cours.

Réels x tels que...	Représentation graphique	Intervalle
$x < 1$		
		
		$]-\infty\,;\,0]$
$x \geqslant -2$		
		
		$]0\,;\,+\infty[$

► Exercice 9

Écrire les intervalles suivants sous la forme d'une inégalité.

$[1\,;\,3]$	$]2\,;\,7]$	$[5\,;\,+\infty[$
$]-1\,;\,0[$	$]-\infty\,;\,7[$	$]-\infty\,;\,7]$

► Exercice 10

Écrire les inégalités suivantes sous la forme d'intervalles.

$2 < x < 3$	$-5 \leqslant x < 12$	$7 \geqslant x \geqslant 3$
$x \leqslant -10$	$1{,}1 \geqslant x$	$11 \leqslant x \leqslant 12$
$3 < x$	$x \geq 3$	$1 > x > 0$

► Exercice 11
Compléter les pointillés avec les symboles $\in$ ou $\notin$.

$3 \ldots [1\,;\,5] \cup [7\,;\,+\infty[$ $\quad$ $3 \ldots [1\,;\,5] \cap [7\,;\,+\infty[$ $\quad$ $3 \ldots [-2\,;\,3[\cup]3\,;\,7]$

$4 \ldots]-\infty\,;\,5[\cap [-2\,;\,+\infty[$ $\quad$ $\dfrac{3}{2} \ldots \left[1\,;\,\dfrac{19}{3}\right] \cap \left]-\infty\,;\,\dfrac{4}{5}\right[$ $\quad$ $1 \ldots \left[\dfrac{17}{18}\,;\,\dfrac{21}{22}\right[\cup \left]\dfrac{18}{17}; \dfrac{17}{16}\right]$

$1 \ldots \left[\dfrac{\sqrt{1+7\sqrt{2}}}{3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}\,;\,\dfrac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{3}\right[$ $\quad$ $3 \ldots [5\,;\,7[\cap \left]\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}\,;\,\dfrac{7+2\pi}{1+\sqrt{42}}\right]$

► Exercice 12
Déterminer, dans chaque cas, l'intersection et l'union des intervalles.

$[3\,;\,7]$ et $[5;\,9]$ $\quad$ $]4\,;\,8]$ et $[5\,;\,10]$ $\quad$ $[3\,;\,5]$ et $[1\,;\,7[$
$]-\infty\,;\,5]$ et $[3\,;\,7]$ $\quad$ $[1\,;\,2]$ et $]2\,;\,5]$ $\quad$ $[-2\,;\,-1[$ et $]-1{,}5\,;\,+\infty[$

► Exercice 13
On considère l'intervalle $I = [3\,;\,7[$. Déterminer l'intervalle J tel que $I \cup J = [2\,;\,7[$ et $I \cap J = [3\,;\,5[$.

► Exercice 14
On considère l'intervalle $I =]-\infty\,;\,5[$. Déterminer l'intervalle J tel que $I \cup J = \mathbb{R}$ et $I \cap J = [3\,;\,5[$.

► Exercice 15
Soit I, J et K trois intervalles. A-t-on toujours $(I \cap J) \cup K = I \cap (J \cup K)$?

3 Valeur absolue

► Exercice 16
Dans chacun des cas suivants, donner la valeur absolue $|x-y|$.

$x = 1$ et $y = 3$ $\quad$ $x = 5$ et $y = -1$ $\quad$ $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{3}$

► Exercice 17
Effectuer les calculs suivants sans utiliser la calculatrice

- $A = 2 \times |1-4| - 5 \times |7-3| + |5-(-1)| \times |-2-3|$
- $B = \dfrac{2}{3} \times \left|\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\right| + \dfrac{1}{4} \times \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\right|$

► Exercice 18
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs des réels x vérifiant les égalités suivantes.

$|x| = 8$ $\quad$ $|x-2| = 5$ $\quad$ $|x-7| = 4$
$|x+1| = 2$ $\quad$ $|x+7| = 3$ $\quad$ $|x+4| = -2$

▶ Exercice 19
Déterminer le(s) réels(s) x vérifiant $|x-3| = |x+1|$.

▶ Exercice 20
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs des réels x vérifiant les égalités suivantes.

$|2x+1| = 7$ $\qquad$ $|3-x| = 8$ $\qquad$ $|5-2x| = 1$

▶ Exercice 21
Soit x un réel. Exprimer les inégalités suivantes en termes d'intervalle.

$|x| \leqslant 7$ $\qquad$ $|x| < 4$ $\qquad$ $|x-2| \leqslant 3$

$|x-4| < 19$ $\qquad$ $|x+20| \leqslant 31$ $\qquad$ $|x+4| < \dfrac{1}{10}$

▶ Exercice 22
Traduire chacun des intervalles suivants à l'aide d'une inégalité de la forme $|x-a| \leqslant b$ ou $|x-a| < b$

$[3\,;\,9]$ $\qquad$ $]-1\,;\,5[$ $\qquad$ $[-2\,;\,0]$

$[10\,;\,19]$ $\qquad$ $]-5\,;\,12[$ $\qquad$ $\left[\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{10}{3}\right]$

4 Nombres décimaux

▶ Exercice 23
Le réel $\dfrac{7}{2+\frac{1}{3}}$ est-il décimal ?

▶ Exercice 24
En utilisant la calculatrice, donner pour chacun des réels suivants un intervalle d'amplitude 10^{-3} le contenant : $\dfrac{3}{7}$; $\pi + \dfrac{7}{6}$; $\dfrac{1487}{1488}$; $\dfrac{\pi+7}{3}$

▶ Exercice 25 — Recherche par balayage.
La recherche de valeur par balayage est un algorithme qui permet de trouver une solution approchée d'une équation. Une des applications les plus connues est la recherche d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire du nombre positif dont le carré vaut 2.

1. Que valent $1{,}4^2$ et $1{,}5^2$? Donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant $\sqrt{2}$
2. Calculer $1{,}41^2$ et $1{,}42^2$. Donner un intervalle d'amplitude 0,01 contenant le nombre $\sqrt{2}$
3. En s'inspirant des questions précédentes, donner un intervalle d'amplitude 0,001 contenant $\sqrt{2}$

▶ Exercice 26
La somme de deux nombres décimaux est-elle toujours un nombre décimal ?