Chapitre II : Calcul algébrique

1 Puissances d'un nombre

Définition 1 : Soit a un réel et n un entier positif.
On note a^n le produit $a \times a \times a \times \cdots \times a$ où le réel a apparaît n fois.
n s'appelle l'exposant de a.

■ **Exemple 1 :** $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. ■

■ **Exemple 2 :** $10^8 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000000$. ■

■ **Exemple 3 :** $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$ ■

R Par convention, pour tout réel a non nul, on a $a^0 = 1$.

Définition 2 : Soit a un réel et n un entier positif.
On note a^{-n} le réel $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

■ **Exemple 4 :** $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{3 \times 3} = \dfrac{1}{9}$. ■

■ **Exemple 5 :** $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10000} = 0,0001$ ■

Propriété 1 : Soit a et b deux réels, m et n deux entiers.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

■ **Exemple 6 :** $\dfrac{2^5 \times 2^8}{2^3} = 2^{5+8-3} = 2^{10} = 1024$. ■

■ **Exemple 7 :** Soit x un réel. $\left(\dfrac{2x}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4 \times x^4}{3^4} = \dfrac{16x^4}{81}$ ■

2 Développement et factorisation

2.1 Rappels

Définition 3 : Développer, c'est transformer un produit en une somme ou une différence de termes.
Factoriser, c'est transformer une somme en un produit de facteurs.

■ **Exemple 8 :** Soit x un réel.

$$\begin{array}{rcl} (2x-4)(3x+2) & = & 2x \times 3x + 2x \times 2 + (-4) \times 3x + (-4) \times 2 \\ & = & 6x^2 + 4x - 12x - 8 \\ & = & 6x^2 - 8x - 8 \end{array}.$$

On utilise la *double distributivité*. ■

■ **Exemple 9 :** Soit x un réel.

$$\begin{array}{rcl} (2x+1)(x+3) - (3x+4)(2x+1) & = & (2x+1)[(x+3) - (3x+4)] \\ & = & (2x+1)(x+3-3x-4) \\ & = & (2x+1)(-2x-1) \end{array}$$

■

2.2 Identités remarquables

Propriété 2 : Pour tous réels a et b, on a :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

■ **Exemple 10 :** Soit x un réel.

- $(x+5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
- $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = x^2 - \sqrt{5}^2 = x^2 - 5$

■

■ **Exemple 11 :** Soit x un réel.

- $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x+3)^2$
- $16x^2 - 40x + 25 = (4x^2) - 2 \times 4x \times 5 + 5^2 = (4x-5)^2$
- $x^2 - 121 = x^2 - 11^2 = (x-11)(x+11)$

■

■ **Exemple 12 :** Soit x un réel.

$$\begin{array}{rcl} (3x+2)^2 - (5x+7)^2 & = & ((3x+2) + (5x+7)) \times ((3x+2) - (5x+7)) \\ & = & (3x+2+5x+7)(3x+2-5x-7) \\ & = & (8x+9)(-2x-5) \end{array}$$

■

3 Opérations sur les égalités et inégalités

Propriété 3 : Soit x et y deux réels.
- Pour tout réel a, on a $x = y$ si et seulement si $x + a = y + a$.
- Pour tout réel **non nul** b, on a $x = y$ si et seulement si $bx = by$.

On peut ajouter/soustraire n'importe quel réel à une égalité ou multiplier/diviser une égalité par n'importe quel réel non nul.

■ **Exemple 13 :** Soit x un réel tel que $2x + 3 = 6x - 9$.
- En retirant $6x$ aux deux membres de l'égalité, on a alors $2x + 3 - 6x = 6x - 9 - 6x$, c'est-à-dire
$$-4x + 3 = -9$$
- En retirant 3 aux deux membres de l'égalité, on a alors $-4x + 3 - 3 = -9 - 3$, c'est-à-dire
$$-4x = -12$$
- En divisant chaque membre de l'égalité par -4, on obtient $\dfrac{-4x}{-4} = \dfrac{-12}{-4}$ soit
$$x = 3$$

■

Propriété 4 : Soit x et y deux réels tels que $x \geqslant y$
- Pour tout réel a, on a encore $x + a \geqslant y + a$. Ajouter ou soustraire un réel à une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.
- Pour tout réel p **strictement positif**, on a encore $px \geqslant py$. Multiplier une inégalité par un nombre strictement positif ne change pas le sens de l'inégalité.
- Pour tout réel n **strictement négatif**, on a $nx \leqslant ny$. Multiplier une inégalité par un nombre strictement négatif **change le sens** de l'inégalité.

Ces propriétés marchent également avec des inégalités strictes.

■ **Exemple 14 :** Soit $x \in [2; 7[$. On souhaite donner un encadrement de $-2x + 1$.
- $x \in [2; 7[$ signifie que
$$2 \leqslant x < 7$$
- On multiplie l'inégalité par -2, qui est **négatif**. On change donc le sens de cette inégalité. On a alors $-2 \times 2 \geqslant -2 \times x > -2 \times 7$, c'est-à-dire
$$-4 \geqslant -2x > -14$$
- On ajoute 1 à chaque membre de l'inégalité. Ainsi, $-4+1 \geqslant -2x+1 > -14+1$, c'est-à-dire
$$-3 \geqslant -2x + 1 > -13$$
- Finalement, si $x \in [2; 7[$, alors $-2x + 1 \in]-13; -3]$

■

4 Équations et inéquations du premier degré

4.1 Équations

Définition 4 : Une **équation** est une égalité qui fait intervenir une ou plusieurs variables appelées **inconnues**. Cette égalité peut être vraie ou fausse, selon les valeurs des inconnues.

Une valeur des variables pour laquelle l'égalité est vraie s'appelle une **solution** de l'équation.

Résoudre une équation, c'est donner l'ensemble de ses solutions.

■ **Exemple 15 :** On considère l'équation d'inconnue réelle x suivante : $2x^2 - 3x = 2x - 2$.

Le réel 2 est solution de cette équation. En effet

- $2 \times 2^2 - 3 \times 2 = 2 \times 4 - 6 = 8 - 6 = 2$
- $2 \times 2 - 2 = 4 - 2 = 2$
- On a bien $2 \times 2^2 - 3 \times 2 = 2 \times 2 - 2$

Il s'avère que les seules solutions de cette équation sont $\frac{1}{2}$ et 2. On écrira $S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$. ■

■ **Exemple 16 :** On cherche à résoudre l'équation $3x + 2 = 5x - 3$, d'inconnue réelle x.

- $3x + 2 = 5x - 3$ si et seulement si $3x + 2 - 2 = 5x - 3 - 2$, c'est-à-dire $3x = 5x - 5$
- $3x = 5x - 5$ si et seulement si $3x - 5x = 5x - 5 - 5x$, c'est-à-dire $-2x = -5$
- $-2x = -5$ si et seulement si $x = \frac{-5}{-2}$, soit $x = \frac{5}{2}$

L'unique solution de l'équation $3x + 2 = 5x - 3$ est $\frac{5}{2}$. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$. ■

(R) Les "si et seulement si" traduisent un raisonnement par équivalence, c'est-à-dire un raisonnement qui peut se lire "dans les deux sens". De cette manière, on montre que non seulement les x trouvés sont solutions, mais qu'en plus, ce sont bien les seules solutions.

4.2 Inéquations

Définition 5 : Lorsque l'on a une inégalité plutôt qu'une égalité, on parle d'inéquation.

■ **Exemple 17 :** Le réel 3 est solution de l'inéquation d'inconnue réelle x suivante :

$$2x^2 - 3x + 2 < 5x^2 + 8x + 14$$

En effet,

- $2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 2 = 2 \times 9 - 9 + 2 = 11$
- $5 \times 3^2 + 8 \times 3 + 14 = 5 \times 9 + 24 + 14 = 45 + 29 + 14 = 83$
- $11 < 83$. On a bien $2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 2 < 5 \times 3^2 + 8 \times 3 + 14$

■

■ **Exemple 18 :** On cherche à résoudre l'inéquation $2x - 5 \leqslant 7x + 3$, d'inconnue réelle x.

- $2x - 5 \leqslant 7x + 3$ si et seulement si $2x - 5 + 5 \leqslant 7x + 3 + 5$, c'est-à-dire $2x \leqslant 7x + 8$
- $2x \leqslant 7x + 8$ si et seulement si $2x - 7x \leqslant 8$, c'est-à-dire $-5x \leqslant 8$
- On divise les deux membres par -5 qui est négatif. $-5x \leqslant 8$ si et seulement si $x \geqslant -\frac{5}{8}$.
- Les solutions de l'inéquation $2x - 5 \leqslant 7x + 3$ forment l'intervalle $\left[-\frac{5}{8}; +\infty\right[$.

■