

Exercices II : Calcul algébrique

I Puissance d'un nombre

► Exercice 1

Ecrire les nombres suivants à l'aide d'une puissance.

$$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad B = \frac{1}{7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

$$C = \frac{\pi \times \pi \times \pi \times \pi \times \pi}{\pi \times \pi}$$

► Exercice 2

Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs numériques des réels suivants.

$$\begin{array}{llll} D = 2^5 & E = 3^4 & F = (-7)^2 & G = 10^5 \\ H = 10^{-4} & I = (-1)^{2021} & J = 5^{-2} & K = 2^3 \times 3^2 \\ L = 1^{42} & M = 5^3 & N = 2^6 & O = 4^3 \end{array}$$

► Exercice 3

Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs numériques des réels suivants.

$$\begin{array}{llll} P = 3 \times 2^3 & Q = (3 \times 2)^3 & R = 1 + 4^3 & S = (1 + 4)^3 \\ T = -2^6 & U = (-2)^6 & V = 12 - 2 \times 3^3 & W = (12 - 2) \times 3^3 \end{array}$$

► Exercice 4

Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs numériques des réels suivants.

$$\begin{array}{lll} A = 2^3 \times 2^5 & B = 3^9 \times 3^{-7} & C = 5^7 \times 5^{-3} \times 5^{-2} \\ D = \frac{2^6 \times 2^5}{2^9} & E = \frac{3^{-3}}{3^4 \times 3^{-9}} & F = \frac{(7^2)^4 \times 7}{7^9} \end{array}$$

► Exercice 5

Soit x un réel non nul. Simplifier les expressions suivantes.

$$\begin{array}{llll} x^5 \times x^3 & x^6 \times x^{-2} & \frac{x^9}{x^3} & \frac{x^{-2}}{x^5} \\ x^3 \times x^7 \times x^{-4} & \frac{x^2 \times x^{-1}}{x^4 \times x^3} & (x^3 \times x^2)^4 & ((x^2)^6)^3 \\ \frac{x^5 \times x^{-2}}{x^7} & \frac{(x^2)^4 \times x^3}{x^{-5} \times x^3} & \frac{(x^2 \times x^3)^4}{x^{-5}} & \left(\frac{x^3 \times x}{x^{-2} \times (x^3)^{-1}} \right)^2 \\ (2x)^3 \times (3x)^2 & \frac{(5x)^4}{50x^3} & \frac{(2x)^3 \times 3x^2}{(3x)^2 \times x^4} & \left(\frac{x^2 \times (3x)^3}{x \times (2x)^{-4}} \right)^2 \end{array}$$

2 Développer et factoriser

► Exercice 6

On considère des réels quelconques x , y et a . Développer et réduire les expressions suivantes

$$A = (2x + 3)(4x + 1)$$

$$B = (5x + 2)(3x - 1)$$

$$C = (2y - 1)(y + 3)$$

$$D = (-2a + 1)(3a + 3)$$

$$E = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}\right) \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}\right)$$

$$F = 4(2x + 1)(3x + 2)$$

► Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes en identifiant le facteur commun.

$$G = (2x + 3)(3x - 1) + (2x + 3)(4x + 1) \quad H = (5x + 2)(3x - 1) - (4x + 1)(5x + 2)$$

$$I = (2y - 1)^2 + (2y - 1)(y + 2) \quad J = (3x + 2)(7x - 5) - (3x + 2)^2$$

$$K = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}\right) \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{10}\right) \left(\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}\right)$$

$$L = (x + 1)(2x + 1)(3x + 2) + (2x + 1)(x + 4)(3x + 2)$$

► Exercice 8

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable.

$$M = (x + 3)^2$$

$$N = (5 - x)^2$$

$$O = (2x + 3)^2$$

$$P = (7x - 5)^2$$

$$Q = (2 - 3x)^2$$

$$R = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}\right)^2$$

$$S = (2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$$

$$T = (5x + 12)^2 + (3x - 4)^2$$

► Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable

$$U = x^2 + 6x + 9$$

$$V = x^2 - 10x + 25$$

$$W = 4x^2 + 4x + 1$$

$$X = 9x^2 - 12x + 4$$

$$Y = 2x^2 + 4x + 2$$

$$Z = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

► Exercice 10

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable.

$$A = (x - 5)(x + 5)$$

$$B = (2x - 7)(2x + 7)$$

$$C = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$D = (3 - 4x)(3 + 4x)$$

► Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable

$$E = x^2 - 25$$

$$F = 49x^2 - 16$$

$$G = 4 - 81x^2$$

$$H = 121x^2 - 169$$

$$I = (x - 1)^2 - 9$$

$$J = (2x + 3)^2 - (3x + 2)^2$$

► Exercice 12

Soit a et b deux réels.

1. En développant et réduisant cette expressions, montrer que

$$\frac{1}{4}((a + b)^2 - (a - b)^2) = ab$$

2. Retrouver ce résultat à l'aide d'une factorisation.

► Exercice 13

Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser les expressions suivantes :

$$G = (2x + 3)^3(3x - 1) + (2x + 3)^3(4x + 1)$$

$$H = (5x + 2)^2(3x - 1) - (4x + 1)(5x + 2)^2$$

$$I = (2y - 1)^5 + (2y - 1)^4(y + 2)$$

$$J = (3x + 2)^3(7x - 5) - (3x + 2)^4$$

$$K = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(3x - 1)$$

$$L = (5x - 1)(2x - 1) - 25x^2 + 1$$

► Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 2$. On pourra par exemple développer en utilisant une identité remarquable.

3 Opérations sur les égalités et inégalités

► Exercice 15

Compléter les rédactions ci dessous.

$5x + 2 = 3x - 8$ $5x + 2 - \dots = 3x - 8 - \dots$ $5x = 3x - \dots$ $5x - \dots = 3x - \dots - \dots$ $\dots x = \dots$ $\frac{\dots x}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $x = \dots$	$4x - 3 = 8x + 2$ $4x - 3 + \dots = 8x + 2 + \dots$ $4x = 8x + \dots$ $4x - \dots = 8x + \dots - \dots$ $\dots x = \dots$ $\frac{\dots x}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $x = \dots$
---	---

► Exercice 16

En reprenant l'exemple précédent, trouver un réel x vérifiant $5x + 2 = -4x - 11$

► Exercice 17

Le périmètre P d'un rectangle de côtés de longueurs L et l vaut $P = 2(L + l)$. Exprimer la longueur L en fonction de P et l .

► Exercice 18

Soit x un réel. En utilisant les relations sur les égalités, se ramener avec membre de gauche développé et réduit et un second membre égal à 0 dans chacun des cas suivants.

$$3x^2 - 2x + 3 = 5x^2 + 4x - 1 \qquad x^3 + 2x - 1 = 2x^2 + 5x + 2$$

$$(x + 1)(x - 3) = (2x + 1)(2x - 1) \qquad \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$$

► Exercice 19

Soit x un réel tel que $-2 \leq x \leq 1$

1. A quel intervalle appartient le réel x ?
2. Compléter les inégalités suivantes

$$\begin{array}{ll} \dots \leq 2x \leq \dots & \dots \leq x + 4 \leq \dots \\ \dots \geq -4x \geq \dots & \dots \leq 3x + 1 \leq \dots \\ \dots \leq -3x + 2 \leq \dots & \dots \leq 3 \times (4 + 2x) \leq \dots \end{array}$$

► Exercice 20

Soit $x \in [3; 9[$.

1. Donner une inégalité vérifiée par le réel x .
2. Donner un encadrement de $3x + 1$.
3. Donner un encadrement de $-2x + 5$.
4. Donner un encadrement de $7 - 4x$.

► Exercice 21

Soit $x \in [-2; 5]$ et $y \in [3; 7]$

1. Donner une inégalité vérifiée par le réel x , puis une inégalité vérifiée par le réel y .
2. Donner un encadrement de $3x + 2y$.
3. Donner un encadrement de $-5x + 3y$.
4. Donner un encadrement de $8x - 2y + 3$.

► Exercice 22

En allant au marché, Julie a remarqué que le kilo de tomates valait entre 1,95 et 2,5 euros. Quant au kilo de carottes, il vaut entre 1,20 et 1,50 euros.

1. Julie souhaite acheter 4 kilos de tomates. Donner un encadrement du prix que cet achat lui coûtera.
2. Même question si Julie souhaite acheter 3 kilos de tomate et deux kilos de carottes.

4 Equations et inéquations du premier degré

► Exercice 23

Le réel 2 est-il solution de l'équation $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$?

► Exercice 24

Le réel -1 est-il solution de l'équation $x^4 + x^3 - 2 = x^7 + x^5$?

► Exercice 25

Le réel 5 est-il solution de l'équation $(2x - 1)^2 = (13 - 2x)^4$?

► Exercice 26

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x .

$$4x + 2 = 3x - 5$$

$$8x + 1 = 6x - 3$$

$$3x + 7 = x - 2$$

$$5 - 4x = 2x + 3$$

$$5x + 1 = -2x + 6$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{5} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{10}$$

► Exercice 27

Soit x un réel

1. Développer et réduire l'expression $(4x - 5)(3x + 2) - (2x + 7)(6x - 3)$.

2. En déduire la solution de l'équation $(4x - 5)(3x + 2) = (2x + 7)(6x - 3)$.

Pour les trois exercices suivants : en appelant x la quantité recherchée, établir une équation permettant de répondre au problème puis résoudre cette équation.

► Exercice 28

Une bouteille et son bouchon coûtent 11 euros. La bouteille coûte 10 euros de plus que le bouchon. Quel est le prix de la bouteille ?

► Exercice 29

Alice a 26 ans et Pierre a 11 ans. Dans combien d'années Alice aura-t-elle le double de l'âge de Pierre ?

► Exercice 30

Dans une boulangerie, 3 pains aux chocolats et 5 croissants coûtent 7 euros et 80 centimes. Le pain au chocolat coûte 20 centimes de plus que le croissant. Quel est le prix d'un croissant dans cette boulangerie ?

► Exercice 31

Aux Etats-Unis, la température est exprimée en Farenheit et non en degrés Celsius. Si on note F la température en Farenheit et C la température en degré Celsius, on a la relation

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

1. A combien de Farenheit correspond une température de 20°C ?
2. A combien de degrés Celsius correspond une température de 100 Farenheit ?
3. Pour quelle température les expressions en Farenheit et degrés Celsius sont-elles les mêmes ?

► Exercice 32

Le nombre 3 est-il solution de l'inéquation $3x + 10 < 6x + 1$?

► Exercice 33

Le réel $\frac{2}{5}$ est-il solution de l'inéquation $5x + 1 \leq 10x + 2$.

► Exercice 34

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue réelle x . On présentera les solutions sous la forme d'un intervalle.

$$4x + 1 < 2x + 7$$

$$7x - 3 \geq 4x + 6$$

$$1 - 3x \leq 2x + 7$$

$$6x - 9 > -7x + 8$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} < \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{7} \leq \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$$

► Exercice 35

Après avoir développé et réduit les différentes expressions, résoudre l'inéquation

$$2(x + 1) - 5(3 - x) \geq 3(2 + x) - 7x$$