Chapitre III : Vecteurs

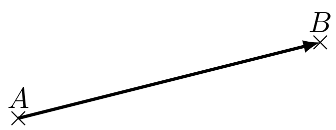
1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 : Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par trois informations :
- Une direction (une droite)
- Un sens
- Une longueur (ou norme)

On note les vecteurs avec une flèche : $\vec{u}$

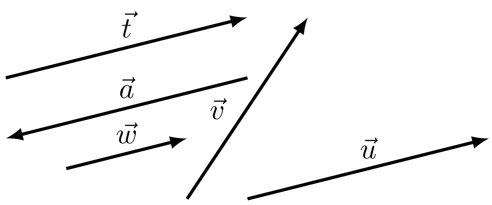
R Attention à ne pas confondre direction et sens !

Exemple 1 : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour direction la droite (AB). Son sens est "de A vers B" et sa norme est la longueur AB.



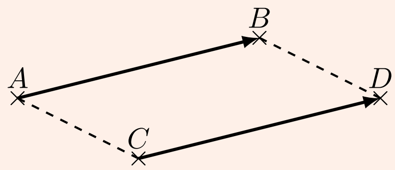
Définition 2 : Deux vecteurs sont *égaux* s'ils ont même direction, même sens et sont de même norme.

Exemple 2 : On considère les vecteurs suivants :



On a
- $\vec{t} = \vec{u}$
- $\vec{t} \neq \vec{a}$ car ces deux vecteurs n'ont pas le même sens.
- $\vec{t} \neq \vec{w}$ car ces deux vecteurs n'ont pas la même norme.
- $\vec{t} \neq \vec{v}$ car ces deux vecteurs n'ont pas la même direction.

Propriété 1 : Soient A,B,C et D quatre points du plan. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si AB<u>DC</u> est un parallélogramme.



Définition 3 : On appelle **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, le vecteur de longueur nulle.

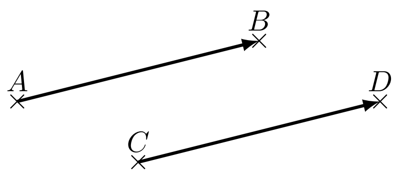
■ **Exemple 3 :** Pour tout point A du plan, $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ■

Propriété 2 : Soient A, B et I trois points du plan. I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

2 Translation

Définition 4 : Soient A, B et C quatre points du plan. L'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

■ **Exemple 4 :** Ici, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



■

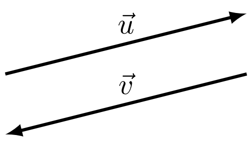
3 Opérations sur les vecteurs

3.1 Opposé d'un vecteur

Définition 5 : Deux vecteurs sont opposés s'ils ont même norme, même direction et des sens contraires.

■ **Exemple 5 :** Si A et B sont deux points du plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. On notera $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. ■

■ **Exemple 6 :** Sur la figure suivante, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés.

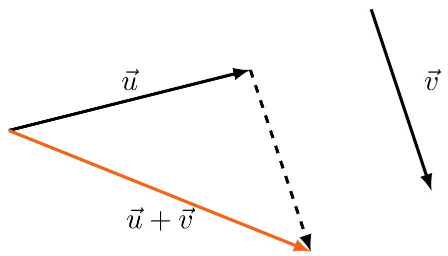


■

3.2 Somme de vecteurs

Propriété 3 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. En appliquant successivement les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation. Le vecteur associé est alors noté $\vec{u}+\vec{v}$.

R Faire la somme de deux vecteurs revient à les mettre l'un à la suite de l'autre et à "joindre le début du premier à la fin du deuxième"



Propriété 4 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On a :

- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

On peut additionner les vecteurs dans l'ordre que l'on veut.

- $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

Soustraire un vecteur revient à ajouter son opposé.

Théorème 3.1 — Relation de Chasles. : Soient A, B et C trois points du plan. On a alors :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

■ **Exemple 7 :** Simplifier au maximum l'expression suivante : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$

D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, d'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}$.
Or $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}$ ■

Théorème 3.2 — Règle du parallélogramme. : : Soient A,B,C et D quatre points du plan. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Démonstration 3.3 : **1)** Supposons que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.
On a donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, ce qui conduit à $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

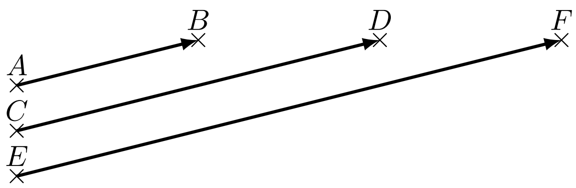
2) Supposons que ABCD est un parallèlogramme, on a alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, d'où, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles. □

4 Colinéarité de vecteurs

4.1 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 6 : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel *positif*. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant même direction, même sens que $\vec{u}$ et dont la norme est le produit de k et de la norme de u.

■ **Exemple 8 :** Sur la figure ci-dessous, on a $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AB}$.

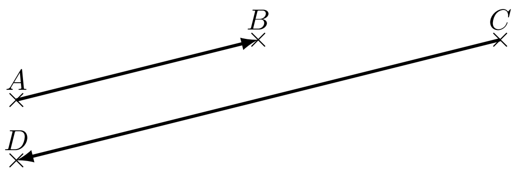


■

R On a également $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Définition 7 : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel *négatif*. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur ayant même direction que $\vec{u}$, sens contraire à $\vec{u}$ et dont la norme est le produit de $-k$ et de la norme de u.

■ **Exemple 9 :** Sur la figure ci-dessous, on a $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$



■

Propriété 5 : Pour tous réels k et l et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$

■ **Exemple 10 :** Simplifier au maximum les expressions suivantes
$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ $3\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}$

On a $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AC}$.

$3\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 2(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{CE}$ ■

Propriété 6 : Soit A, B et I trois points du plan. I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

Démonstration 4.1 : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$. En ajoutant $\overrightarrow{AI}$ de chaque côté, cela équivaut à $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$ □

4.2 Colinéarité

Définition 8 : Soit u et v deux vecteurs. On dit que u et v sont colinéaires si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

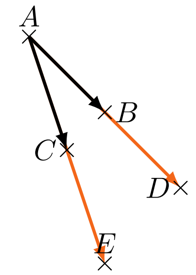
- $\vec{v} = 0$
- il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Propriété 7 : Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles (éventuellement confondues) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

■ **Exemple 11 :** On considère un triangle ABC, ainsi que les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$

On peut également écrire $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{BA}$. On a alors $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CB}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont donc colinéaires. Les droites (DE) et (CB) sont donc parallèles.



■

Propriété 8 : Soit A, B et C trois points du plan. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

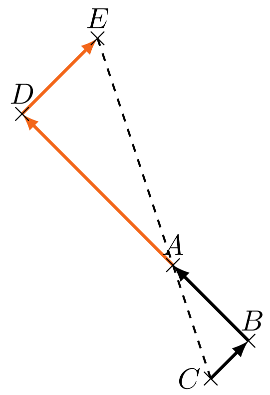
■ **Exemple 12 :** On considère trois points A, B et C non alignés.

On construit alors le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BA}$ et le point E tel que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{CB}$

On a alors $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont donc colinéaires. Les droites (AC) et (AE) ont le point A en commun.

Les points A, E et C sont donc alignés.



■