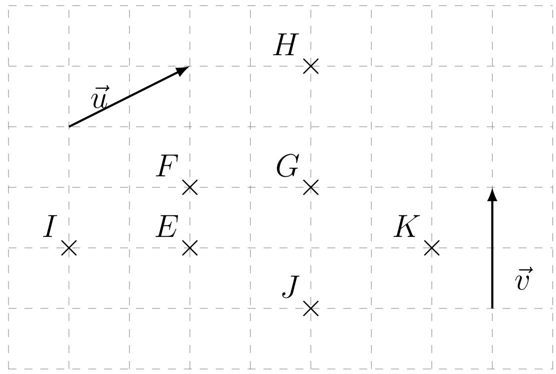
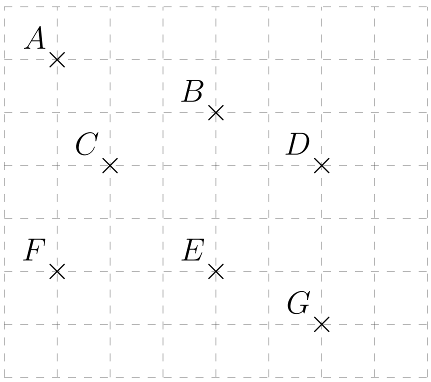
Exercices III : Vecteurs

► **Exercice 1**
Sur la figure ci-contre, déterminer les vecteurs égaux aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

► **Exercice 2**
Construire les points L et M tels que $\overrightarrow{GL} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{KM} = \vec{v}$.

► **Exercice 3**
Construire le point N tel que $\overrightarrow{JN} = \overrightarrow{EH}$



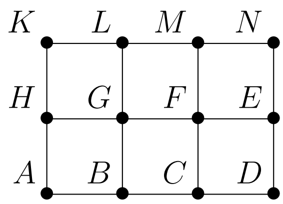


► **Exercice 4**
Sur la figure ci-contre, construire :

1. H, l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. I, l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.
3. JKL, l'image du triangle DEG par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
4. M tel que C soit l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{EB}$.

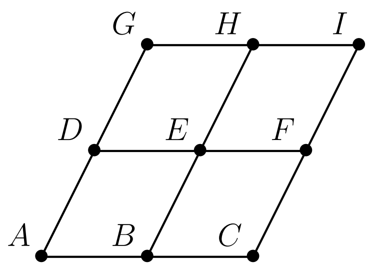
► **Exercice 5**
(*) Sur la figure ci-contre, constituée de 6 carrés déterminer

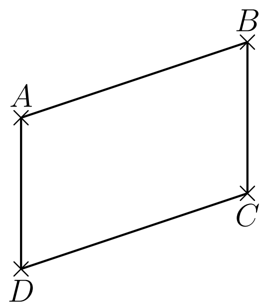
1. l'image de H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$
2. l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{MB}$
3. Trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FD}$, différents de celui-ci.



► **Exercice 6**
(*) Sur la figure ci-contre, constituée de 4 parallélogrammes, déterminer

1. l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{DH}$
2. l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$
3. trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{CE}$, différents de celui-ci.
4. un vecteur égal à $\overrightarrow{IB}$, différent de celui-ci.





► Exercice 7

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme.

1. A quel autre vecteur est égal $\overrightarrow{CD}$? $\overrightarrow{CB}$? $\overrightarrow{AD}$?
2. Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$
3. Construire le point F, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

► Exercice 8 — S'entraîner à démontrer.

On considère six points A,B,C,D,E et F tels que ABCD et CDEF sont des parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Ecrire les égalités vectorielles correspondant à cette affirmation.
3. Montrer que ABFE est un parallélogramme.

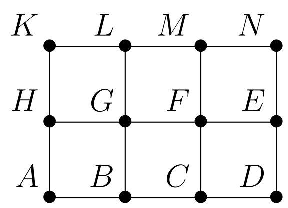
► Exercice 9

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de $[AB]$.

1. Faire une figure et construire le point I', image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
2. Construire le point A', image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{I'I}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $BCAA'$? Justifier.

► Exercice 10

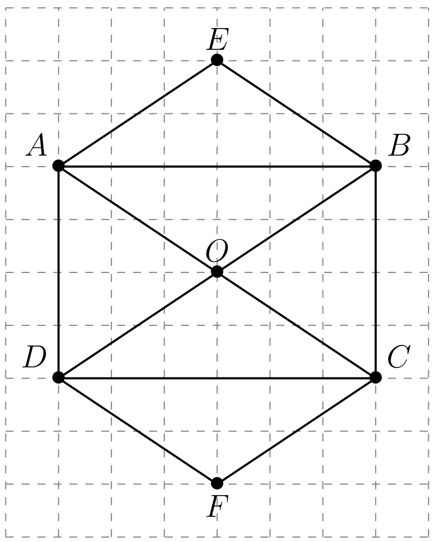
Sur la figure ci-contre, constituée de 6 carrés déterminer :



1. deux vecteur égaux à $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM}$
2. deux vecteur égaux à $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LF}$
3. deux vecteur égaux à $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GM}$
4. deux vecteur égaux à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HL}$

► Exercice 11

En utilisant la figure ci-contre, simplifier les égalités de vecteurs suivantes



1. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EO} =$
2. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$
3. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FC} =$
4. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} =$
5. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{DO} =$
6. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OF} =$
7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$
8. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FA} =$

▶ Exercice 12

On considère un carré ABCD. Faire une figure puis...

1. Construire le point E tel que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}$
2. Construire le point F tel que $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$
3. Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

▶ Exercice 13

Simplifier au maximum les sommes de vecteurs suivantes

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ $\quad$ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}$ $\quad$ $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}$ $\quad$ $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{DA}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

▶ Exercice 14

Simplifier au maximum les sommes de vecteurs suivantes

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PB}$ $\quad$ $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $-\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{MK}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{TM}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FT}$ $\quad$ $\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{BL} - \overrightarrow{BU}$

▶ Exercice 15 — S'entraîner à démontrer .

Le but de l'exercice est de démontrer la règle du parallélogramme : Soit A, B, C et D quatre points du plan. $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

1. On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme.
   (a) A quel vecteur est égal le vecteur $\overrightarrow{AB}$?
   (b) Ajouter $\overrightarrow{AD}$ à chaque membre de l'égalité de la question précédente. Qu'obtient-on ?
2. On suppose désormais que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
   (a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ selon D grâce à la relation de Chasles.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et conclure.

▶ Exercice 16 — S'entraîner à démontrer .

On considère un parallélogramme RSTU de centre O. On place les points M et N sur le segment [RS] et [UT] tels que $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{UN}$. Montrer que O est le milieu de [MN]. (Ne pas hésiter à faire une figure pour visualiser le problème).

▶ Exercice 17

Des points ont été placés sur une droite ci-dessous. La distance entre deux points consécutifs est toujours la même.

1. Compléter les égalités suivantes avec des réels.

$\overrightarrow{AE} = \ldots \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DF} = \ldots \overrightarrow{IH}$	$\overrightarrow{HJ} = \ldots \overrightarrow{CI}$
$\overrightarrow{BG} = \ldots \overrightarrow{IF}$	$\overrightarrow{BH} = \ldots \overrightarrow{CE}$	$\overrightarrow{JA} = \ldots \overrightarrow{BF}$

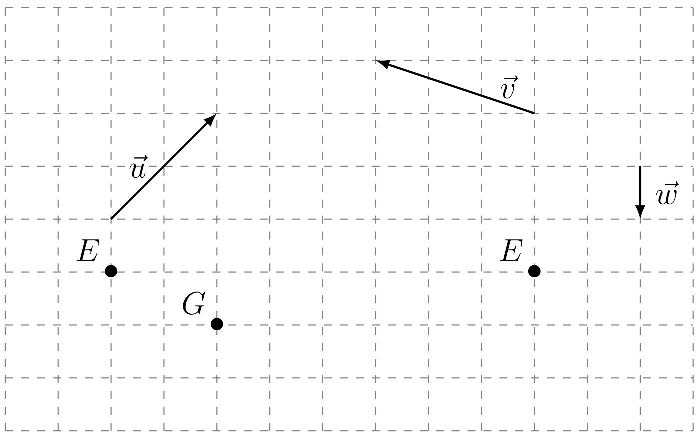
2. Déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :

$2\overrightarrow{DE} =$	$3\overrightarrow{FI} =$	$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BH} =$
$-2\overrightarrow{CE} =$	$-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{FD} =$	$-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AF} =$

▶ Exercice 18

Sur la figure ci-dessous, construire les points H, I, J, K, L, M,N définis par les relations vectorielles suivantes.

- $\overrightarrow{EH} = 2\vec{u}$
- $\overrightarrow{EI} = -\dfrac{1}{2}\vec{u}$
- $\overrightarrow{FJ} = 3\vec{v}$
- $\overrightarrow{FK} = 2\vec{w}$
- $\overrightarrow{GL} = \vec{w} + 2\vec{u}$
- $\overrightarrow{GM} = -5\vec{w}$
- $\overrightarrow{NE} = \vec{v} - \vec{w} - 2\vec{u}$



▶ Exercice 19

Simplifier au maximum les écritures vectorielles suivantes.

$3\vec{u} + 2\vec{u} + 4\vec{u}$	$5\vec{u} - 2\vec{u} + \vec{u}$	$-7\vec{u} + \vec{u} + 8\vec{u}$
$2\vec{u} - (3\vec{u} + 4\vec{u})$	$\vec{u} + 2(\vec{u} + 5\vec{u})$	$\dfrac{2}{5}\vec{u} - \dfrac{4}{5}\vec{u} + \dfrac{1}{10}\vec{u}$
$3\vec{u} - 2\vec{u} + \vec{u}$	$\dfrac{3}{7}\vec{u} + \dfrac{6}{7}\vec{u} + \dfrac{5}{7}\vec{u}$	$3(\vec{u} - 2\vec{u}) + 2(3\vec{u} + 4\vec{u})$

▶ Exercice 20

En utilisant la relation de Chasles, simplifier les expressions vectorielles suivantes.

$2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$	$4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA}$	$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

▶ Exercice 21

Soient A, B, C, D et E cinq points du plan et M le point tel quel

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.

▶ Exercice 22 — S'entraîner à démontrer.

Le but de l'exercice est de montrer que dans tout quadrilatère, les milieux des côtés forment un parallélogramme. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème de Varignon**. On considère donc ABCD un quadrilatère quelconque, ainsi que I, J, K et L, milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ selon B grâce à la relation de Chasles.
2. On rappelle que I et J sont les milieux de [AB] et [BC]. Quelles égalités vectorielles peut-on écrire ?
3. Montrer alors que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IJ}$
4. Montrer de même que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{LK}$ et conclure.

▶ Exercice 23

Soit OAB un triangle et C, D les points tels que $\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}=-2\overrightarrow{OB}$.

1. Simplifier l'expression $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$ en utilisant la relation de Chasles.
2. Montrer que $\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{BA}$
3. Que peut-on en déduire ?

▶ Exercice 24

Soit OAB un triangle et C, D les points tels que $\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OB}$
2. Que peut-on en déduire ?

▶ Exercice 25

(***) Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, E telque $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$ et F tel que $\overrightarrow{CF}=-2\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{FE}=4\overrightarrow{AB}-\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. On pourra utiliser la relation de Chasles en décomposant $\overrightarrow{FE}$ selon A et C.
2. Montrer que $\overrightarrow{FO}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{10}\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire que F, O et E sont alignés.