Produits et quotients

1 Équations produits

Définition 1 : Soit P(x) et Q(x) des expressions en fonction d'un réel x. Une équation de la forme P(x)Q(x)=0 est appelée équation produit.

Propriété 1 — Phrase magique numéro 1. : Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

■ **Exemple 1 :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(3x+2)(2x-1)=0$

$$\begin{array}{llll} (3x+2)(2x-1)=0 & \text{si} \quad 3x+2=0 & \text{OU} & 2x-1=0 \\ & \text{si} \quad 3x=-2 & \text{OU} & 2x=1 \\ & \text{si} \quad x=-\dfrac{2}{3} & \text{OU} & x=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

L'équation $(3x+2)(2x-1)=0$ a deux solutions. $S=\left\{\dfrac{-2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$. ■

Pour résoudre une équation, il est très souvent utile de se ramener à une équation produit nul, en factorisant par exemple.

2 Équations quotients

2.1 Valeurs interdites

■ **Exemple 2 :** On considère l'expression $T(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$

On a $T(1)=\dfrac{3+1}{3-1}=\dfrac{4}{2}=2$.

En revanche, pour $x=3$, le dénominateur vaut 0. Il est donc impossible de calculer la valeur de $T(3)$. On dit que 3 est une valeur interdite. ■

Définition 2 : Le domaine de définition d'une expression qui dépend d'une variable x est l'ensemble des valeurs de x autorisées.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, on pose $T(x)=\dfrac{2x+5}{5x-10}$.

x est une valeur interdite si $5x-10=0$, c'est-à-dire, si $5x=10$ et donc $x=2$.

Le domaine de définition de T est donc l'ensemble de tous les réels sauf 2. Cet ensemble est noté $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. ■

2.2 Sommes de quotients

Propriété 2 : Pour tous réels a, b, c et d, avec b et d différents de 0, on a :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{db}=\frac{ad+cb}{bd}$$

■ **Exemple 4 :** $\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{3\times 5+4\times 7}{7\times 5}=\dfrac{15+28}{35}=\dfrac{43}{35}$. ■

■ **Exemple 5 :** Simplifier l'expression suivante : $\dfrac{7x}{x-2}+\dfrac{5}{3-x}$.

On calcule d'abord les valeurs interdites :

- $x-2=0$ si $x=2$
- $3-x=0$ si $x=3$

Les valeurs interdites sont 2 et 3. Le domaine de définition est $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$.
Soit $x\in D$.

$$\begin{aligned}
\frac{7x}{x-2}+\frac{5}{3-x} &= \frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)}+\frac{5(x-2)}{(x-2)(3-x)}\\
&= \frac{7x(3-x)+5(x-2)}{(x-2)(3-x)}\\
&= \frac{21x-7x^2+5x-10}{(x-2)(3-x)}\\
&= \frac{-7x^2+26x-10}{(x-2)(3-x)}
\end{aligned}$$

■

R Evidemment, si les quotients sont au même dénominateur, on ne s'embêtera à faire tout ce laborieux travail.

2.3 Equations quotients

Définition 3 : Soit P(x) et Q(x) des expressions en fonction de x. Une équation de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, avec $Q(x)\neq 0$ est appelée équation quotient.

Propriété 3 — Phrase magique numéro 2. : Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est différent de 0.

■ **Exemple 6 :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x-4}{x-3}=0$

On cherche d'abord les valeurs interdites : $x-3\neq 0$ pour $x\neq 3$. 3 est donc la seule valeur interdite.
Soit donc $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x-4}{x-3}=0 \quad &\text{si} \quad 2x-4=0\\
&\text{si} \quad 2x=4\\
&\text{si} \quad x=2
\end{aligned}$$

2 n'est pas une valeur interdite, elle est solution de l'équation. $S=\{2\}$ ■

3 Résolution d'inéquations

3.1 Expressions du premier degré

■ **Exemple 7 :** On souhaite étudier le signe de l'expression $A(x) = 3x - 6$; On va pour cela résoudre l'inéquation $3x - 6 \leq 0$

Résolution

$3x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$

Tableau de signe

On résume cette information sous la forme d'un tableau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$3x - 6$		$-$	0	$+$	

■

3.2 Produit d'expressions du premier degré

■ **Exemple 8 :** On souhaite étudier le signe de l'expression $B(x) = -2(x - 3)(-2x + 4)$

Identification

On identifie tous les facteurs de ce produit. Il y en a 3 : -2, $x - 3$ et $-2x + 4$.

Résolution

Pour chacun de ces facteurs, on détermine le signe.

$-2 \leq 0$

$x - 3 \leq 0$
$\Leftrightarrow x \leq 3$

$-2x + 4 \leq 0$
$\Leftrightarrow -2x \leq -4$
$\Leftrightarrow x \geq 2$

Tableau de signe

On place toutes ces informations dans un seul et même tableau de signe. On applique ensuite la règle des signes dans un produit.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x + 4$		$+$	0	$-$		$-$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

■

3.3 Quotient d'expressions du second degré.

Pour un quotient d'expressions, on utilise la même méthode que pour le produit en ajoutant le calcul des **valeurs interdites**.

■ **Exemple 9 :** On souhaite étudier le signe de l'expression $C(x) = \dfrac{3x-6}{6x-18}$

Valeurs interdites

L'expression n'est pas définie lorsque $6x - 18 = 0$, soit $x = 3$.

Identification

On identifie tous les facteurs de ce quotient. Il y en a 2 : $3x - 6$ et $6x - 18$.

Résolution

Pour chacun de ces facteurs, on détermine le signe.

$3x - 6 \leq 0$
$\Leftrightarrow x \leq 2$

$6x - 18 \leq 0$
$\Leftrightarrow x \leq 3$

Tableau de signe

On place toutes ces informations dans un seul et même tableau de signe. On applique ensuite la règle des signes dans un produit et on met une double barre pour les valeurs interdites.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-18$		$-$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

■