# Exercices IV : Calcul algébrique

## 1 Equations produits

### ▶ Exercice 1 — Pour bien commencer....

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle $x$.

$2x+4=0$ $\quad$ $6x-3=0$ $\quad$ $5x-7=0$

$13x-52=0$ $\quad$ $\dfrac{3}{2}x-1=0$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{6}{5}=0$

### ▶ Exercice 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$(2x-2)(4x-8)=0$ $\quad$ $(x-1)(x-7)=0$

$(8x+4)(-2x-4)=0$ $\quad$ $(3x+6)(9x-3)=0$

$(4x-8)(2x-2)(3x-9)=0$ $\quad$ $(5x-3)(4x+9)=0$

$\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{5}\right)(2x+9)=0$ $\quad$ $(x-1)^2=0$

$(x-1)^2(2x-6)^3=0$ $\quad$ $(x-2)(2x-4)(3x-6)=0$

### ▶ Exercice 3

Après factorisation, résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$(2x-2)(4x-8)+(2x-2)(3x-5)=0$ $\quad$ $(x+1)(2x-7)+(x+1)(4x-2)=0$

$(x+1)(3x+2)+(x+1)(x-1)=0$ $\quad$ $x^2+8x+16=0$

$x^2-49=0$ $\quad$ $(x-1)^2-(2x-7)^2=0$

### ▶ Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $B(x)=x^2+4x-21$

1. Peut-on factoriser $B(x)$ à l'aide d'une identité remarquable ? Justifier.
2. Montrer que $B(x)=(x+2)^2-25$. On appelle cette écriture la forme canonique de $B$.
3. En déduire une factorisation de $B(x)$ puis les solutions de l'équation $x^2+4x-21=0$

### ▶ Exercice 5

Donner une équation produit dont les solutions sont exactement 3, $-2$ et 1.

### ▶ Exercice 6

Donner une équation produit n'utilisant que des coefficients entiers et dont les solutions sont exactement $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{3}{2}$.

# 2 Equations quotients

### ▶ Exercice 7

Soit $x$ un réel. Préciser le domaine de définition des expressions suivantes

$$\frac{1}{2x+5} \qquad \frac{2x+1}{3x-4} \qquad \frac{3-x}{(x-1)(2x+3)} \qquad \frac{1}{x}$$

### ▶ Exercice 8

Donner une expression qui dépend de la variable $x$ et dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

### ▶ Exercice 9

Donner une expression qui dépend de la variable $x$ et dont le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$.

### ▶ Exercice 10

Sans utiliser la calculatrice, effectuer les calculs suivants

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{3} \qquad \frac{7}{9}-\frac{16}{9} \qquad \frac{3}{4}+\frac{5}{2} \qquad \frac{2}{7}+\frac{3}{11}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{1}{6} \qquad \frac{7}{9}-\frac{3}{4} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} \qquad \frac{2}{7}+\frac{4}{5}+\frac{9}{2}$$

### ▶ Exercice 11

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque expression, déterminer les valeurs interdites et simplifier les sommes de quotients :

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{x} \qquad \frac{x-3}{x+2}-\frac{2x}{x+2} \qquad \frac{1}{2x-1}-\frac{x+2}{2x-1}$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1} \qquad \frac{x+2}{(2x+1)}+\frac{3}{x-2} \qquad \frac{3x-1}{2x+4}+\frac{2x}{4x-1}$$

$$\frac{3}{x+2}-3 \qquad 5-\frac{4x+1}{2x+3} \qquad \frac{2}{x}-\frac{3}{1-x}$$

### ▶ Exercice 12

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On n'oubliera pas de préciser le domaine de définition avant de se lancer dans les calculs.

$$\frac{x-1}{x}=0 \qquad \frac{(2x-4)(x-3)}{2x-1}=0$$

$$\frac{x(x-2)}{2x-4}=0 \qquad \frac{x^2-2x+1}{x-1}=0$$

### ▶ Exercice 13

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{3x+8}{5x-2}=\frac{4}{3} \qquad \frac{2x-4}{x-2}+\frac{4x-5}{3-2x}=0$$

# 3 Inéquations produits et quotients

### ▶ Exercice 14

Compléter les tableaux de signes suivants

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $5x-10$ | | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\cdots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-8x+24$ | | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\cdots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x+7$ | | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $\cdots$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $9-3x$ | | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | |

### ▶ Exercice 15

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$

$A(x) = 3x - 12$ $\quad B(x) = 4x + 28$ $\quad C(x) = -3x - 27$

$D(x) = 24x + 10$ $\quad E(x) = -15x + 8$ $\quad F(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{6}{7}$

$G(x) = x + \sqrt{2}$ $\quad H(x) = -2x - \dfrac{1}{4}$ $\quad I(x) = -7x$

### ▶ Exercice 16

Dresser le tableau de signe des expressions suivantes sur $\mathbb{R}$

$G(x) = (3x+6)(2x-4)$ $\quad H(x) = (-3x+9)(-2x+14)$

$I(x) = (2x-8)(4x-4)$ $\quad J(x) = (-3x+1)(2x-5)$

$K(x) = (7x-14)^2$ $\quad L(x) = (2x+1)(3x-4)(-5x+10)$

### ▶ Exercice 17

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On donnera les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles

$(3x+6)(2x-4) \leq 0$ $\quad (7x-14)(3x-18) \geq 0$

$(-2x-8)(4x-4) < 0$ $\quad (-3x+1)(5x-5) > 0$

$(2x+2)(-4x-8)^2 > 0$ $\quad (3x-6)(2x-3)(x+2) \leq 0$

### ▶ Exercice 18

Construire le tableau de signes des expressions suivantes, sans oublier les valeurs interdites.

$\dfrac{2x+8}{4x-8}$ $\quad \dfrac{7x-14}{3x-6}$

$\dfrac{2x+3}{4x-12} < 0$ $\quad \dfrac{5x+1}{7x+2}$

**▶ Exercice 19**

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On donnera les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles

$\dfrac{3x+6}{2x-16} \leq 0$ $\quad$ $\dfrac{7x-14}{3x-6} \geq 0$

$\dfrac{2x+1}{-3x-12} < 0$ $\quad$ $\dfrac{5x+1}{-10x+2} > 0$

$\dfrac{(2x+1)(3x-4)^2}{5x-10} \geq 0$ $\quad$ $\dfrac{2x+1}{5x(3x-6)^2} \leq 0$

**▶ Exercice 20**

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On donnera les solutions sous la forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles

$x^3 - 4x^2 + 2x \geqslant x^3 - 4x^2 - 5x + 8$ $\quad$ $\dfrac{6x-9}{2x+4} \leqslant 3$

**▶ Exercice 21**

Le prix $x$ d'une paire de baskets est compris entre 20 et 50 €.
L'offre est le nombre de paires de baskets qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs pour un prix de $x$ euros. Elle vaut $f(x) = -\dfrac{500000}{x} + 35000$
La demande est le nombre probable de paires de baskets achetés lorsque le prix est fixé à $x$ euros. La demande vaut alors $d(x) = -750x + 45000$

1. Montrer que résoudre l'inéquation $f(x) > d(x)$ sur $[20; 50]$ revient à résoudre, sur ce même intervalle, l'inéquation

$$\frac{3x^2 - 40x - 2000}{x} > 0$$

2. Montrer que pour tout $x \in [20; 50]$, $3x^2 - 40x - 2000 = (x+20)(3x-100)$.
3. En déduire la fourchette de prix pour laquelle l'offre est supérieure à la demande.

**▶ Exercice 22**

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

$(2x+6)^2 \geqslant 9x^2 - 30x + 25$ $\quad$ $\dfrac{x-3}{4x+10} \leqslant \dfrac{4x+10}{x-3}$

**▶ Exercice 23**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \geqslant 2$