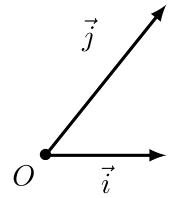
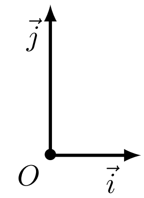
Repérage dans le plan

1 Repère du plan

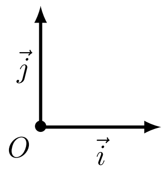
Définition 1 : On appelle repère du plan tout triplet (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) où O est un point, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs non colinéaires.
Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires, on dira que le repère est orthogonal.
Si de plus les normes ce des deux vecteurs sont 1, on dira que le repère est orthonormé.



Repère quelconque



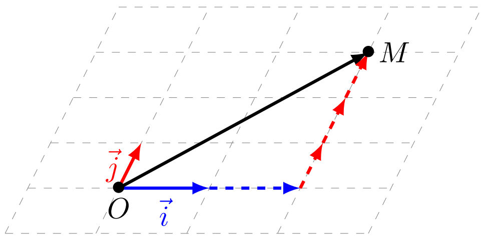
Repère orthogonal



Repère orthonormé

Propriété 1 : Soit M un point dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) quelconque. Il existe un unique couple de réels (x,y) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ces réels sont les *coordonnées* du point M dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

▪ **Exemple 1 :** Ici, $\vec{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Le point M a pour coordonnées (2;3). On note $M(2;3)$.



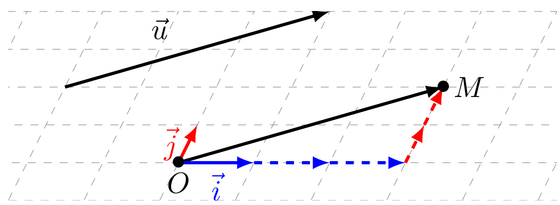
■

2 Coordonnées d'un vecteur

2.1 Calcul de coordonnées

Définition 2 : Soit $\vec{u}$ un vecteur dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$). Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

▪ **Exemple 2 :** Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M(3;2)



On notera les coordonnées d'un vecteur en colonnes : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ■

Propriété 2 : Soit A et B deux points de coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B) dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ quelconque. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

■ **Exemple 3 :** Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ quelconque, on place les points $A(1;-3)$, $B(-2;2)$ et $C(-2;-3)$. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\2-(-3)\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2-(-2)\\-3-2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\-3-(-3)\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

■

Propriété 3 : Soit k un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ quelconque. Alors :

- $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

■ **Exemple 4 :** Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$. Montrer que $2\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$.

- On détermine les coordonnées de $2\vec{u}$: $\begin{pmatrix}2\times1\\2\times2\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $\vec{v}+\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix}-1+3\\2+2\end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, qui sont les mêmes coordonnées que celles de $2\vec{u}$.
- On a donc bien $2\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$

■

2.2 Critère de colinéarité

Définition 3 : Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la quantité $xy'-yx'$.

Propriété 4 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant vaut 0.

Démonstration 2.1 : Si l'un des deux vecteurs est nul, alors l'équivalence est directe. On supposera donc que ni $\vec{u}$, ni $\vec{v}$ n'est le vecteur nul.

- Supposons que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Il existe alors un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vaut $xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$.

- Supposons que $xy' - yx' = 0$ Puisque $\vec{v}$ n'est pas le vecteur nul, alors au moins une de ses coordonnées n'est pas nulle. Par exemple, prenons $x' \neq 0$. On pose $k = \dfrac{x}{x'}$. On a alors $x = \dfrac{x}{x'}x' = kx'$. De plus, $xy' - yx' = 0$, donc $xy' = yx'$, d'où $y = \dfrac{x}{x'}y' = ky'$. Ainsi, $\vec{u} = k\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

□

■ **Exemple 5 :** Dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), on considère les points A(2;3), B(4;7), C(-1;2) et D(0;4). Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Stratégie : on veut montrer que les droites sont parallèles, on va donc montrer que les vecteurs associés sont colinéaires. Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-3 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit on remarque que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Soit on calcule le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Il vaut $2 \times 2 - 4 \times 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. ■

3 Milieu d'un segment

Propriété 5 : Dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), le milieu I du segment [AB], avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ a pour coordonnés :

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Démonstration 3.1 : Soit $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ et $I(x_I;y_I)$ trois points dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), tels que I est le milieu de $[AB]$. On a alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ sont $\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\overrightarrow{IB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_I \\ y_B - y_I \end{pmatrix}$.

On a donc

- $x_I - x_A = x_B - x_I$, c'est-à-dire $2x_I = x_A + x_B$ et $x_I = \dfrac{x_A+x_B}{2}$
- $y_I - y_A = y_B - y_I$, c'est-à-dire $2y_I = y_A + y_B$ et $y_I = \dfrac{y_A+y_B}{2}$

□

■ **Exemple 6 :** Dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), on considère les points A(2;7), B(3;1) et C(4;12). Déterminer les coordonnées de I et J, les milieux de [AB] et [BC]. Montrer que (IJ) est parallèle à (AC)

- I est le milieu de [AB]. Ses coordonnées sont donc $\left(\dfrac{2+3}{2};\dfrac{7+1}{2}\right)$. On a donc $I\left(\dfrac{5}{2};4\right)$.
- J est le milieu de [BC]. Ses coordonnées sont donc $\left(\dfrac{3+4}{2};\dfrac{1+12}{2}\right)$. On a donc $J\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{13}{2}\right)$.

- On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  - $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\\ \frac{13}{2}-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$.
  - $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\ 12-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$
- On remarque que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{IJ}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sot donc colinéaires, les droites (IJ) et (AC) sont donc parallèles.

■

4 Distance dans un repère orthonormé

Propriété 6 : Soit A et B deux points de coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B) dans un repère ORTHONORMÉ. Alors, la distance AB vaut :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

■ **Exemple 7 :** Soit A(2;5) et B(3;8) dans un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) orthonormé. Calculer la distance AB.
$AB=\sqrt{(3-2)^2+(8-5)^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ ■