Exercices : Notion de fonction

1 Vocabulaire

► Exercice 1

On définit une fonction f à l'aide du tableau de valeurs suivants

x	-1	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	0	6
$f(x)$	8	-3	8	π	2,5

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Quelle est l'image par f de 0 ? de 6 ?
3. Quels sont les antécédents de 8 par f ?

► Exercice 2

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 6$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{7}{6}\right)$
2. Déterminer les antécédents de 0 par f;
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto (2x+1)(3-9x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$
2. Quelle est l'image de 3 par f ?
3. Déterminer les antécédents de 0 par f.

► Exercice 4

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 10$ et $g(x) = 10x + 5$

1. Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{11}{4}\right)$, $g\left(\frac{3}{5}\right)$
2. Déterminer les antécédents de 0 par f et g;
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 5

On reprend cet exemple du cours : Un parc d'attractions est ouvert au public de 8h à 21h. On considère la fonction C définie pour tout $t \in [8;21]$ par

$$C(t) = -8t^2 + 232t - 1282$$

On admet que C représente le nombre de visiteurs attendus à l'heure t de la journée.

1. Combien de visiteurs sont attendus à 14h ?
2. Combien de visiteurs sont attendus à l'ouverture ?
3. Combien de visiteurs sont attendus à 12h30 ?
4. Combien de visiteurs sont attendus à 15h15 ?

► Exercice 6

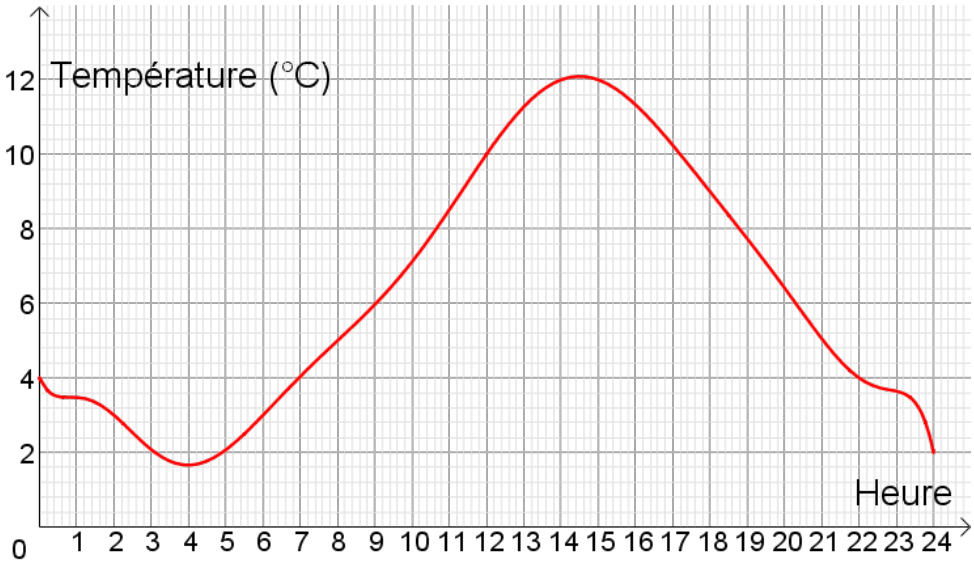
On considère les fonctions $f : x \mapsto (3x+2)(4x-7)$ et $g : x \mapsto (3x+2)(6x-3)$

1. Soit x un réel. Factoriser $g(x) - f(x)$
2. Résoudre l'équation $g(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. Résoudre l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2 Courbe représentative

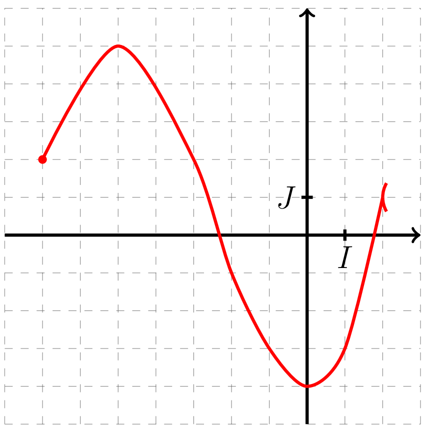
► Exercice 7

On a mesuré la température dans une ville tout au long de la journée. La température en fonction de l'heure de la journée est représentée sur le graphique ci-dessous.



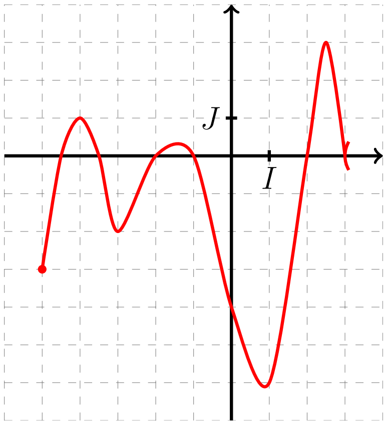
1. Quelle température faisait-il à midi ?
2. A quelle heure de la journée la température est-elle passée au-dessus de 6°C ?
3. Pour une heure de la journée h on note $T(h)$ la température à cette heure de la journée. On définit ainsi une fonction T sur l'intervalle $[0; 24[$.
   (a) Traduire les égalités $T(6) = 3$ et $T(18) = 9$ dans le contexte de l'exercice.
   (b) Déterminer graphiquement $T(14)$.
   (c) On souhaite résoudre graphiquement l'inéquation $T(h) > 4$. Traduire cette inéquation par une phrase dans le contexte de l'exercice puis résoudre cette inéquation.

► Exercice 8



Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quelle est l'image par f de -4 ? de -6 ?
3. Que vaut $f(-5)$?
4. Quels sont les antécédents par f de -4 ? -3 ?
5. Combien y a-t-il d'antécédents par f du réel -1 ? du réel 1 ?



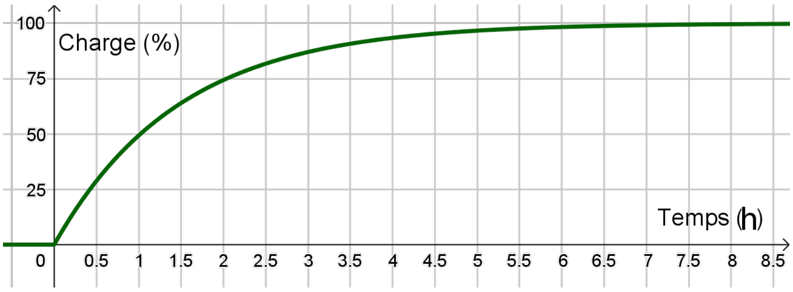
► **Exercice 9**

(*) Soit f la fonction dont la courbe représentative est donnée ci-contre

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Quelle est l'image par f de -2 ? de 1 ?
3. Que vaut $f(-3)$?
4. Combien y a-t-il d'antécédents par f du réel -2 ? du réel -3 ?
5. Déterminer les antécédents de 0 par f.

► **Exercice 10**

Le condensateur est un appareil électronique capable d'accumuler et stocker de l'énergie électrique. Pour cela, il suffit de le brancher sur un générateur continu et le condensateur se chargera alors. Le graphique ci-dessous indique la charge d'un condensateur en fonction du temps.



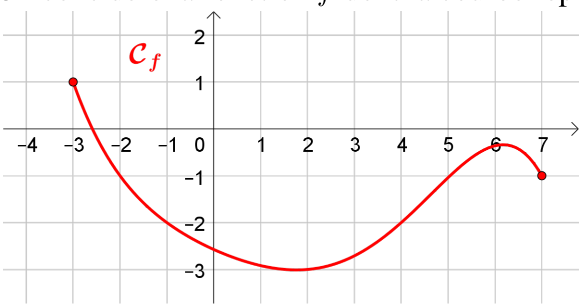
1. Quelle est la charge du condensateur au bout d'une heure de charge ?
2. Combien de temps faut-il attendre pour que le condensateur soit chargé à 75% ?

On propose de modéliser la charge du condensateur à l'aide d'une fonction g définie pour $x \in]0;+\infty[$ par $g(x) = 100 - \dfrac{50}{x}$.

3. Calculer $g(1)$, $g(2)$ et $g(0{,}5)$.
4. Le graphique présenté peut-il être celui de la fonction g ? Justifier.

► **Exercice 11**

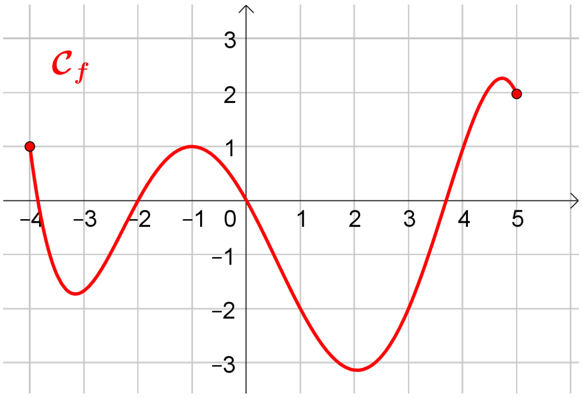
On considère la fonction f dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. Donner le domaine de définition D de f
2. Que valent $f(-3)$, $f(-1)$ et $f(7)$?
3. Résoudre l'équation $f(x) = -2$ sur D.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < -1$ sur D.
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ sur D.

► Exercice 12

On considère la fonction f dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



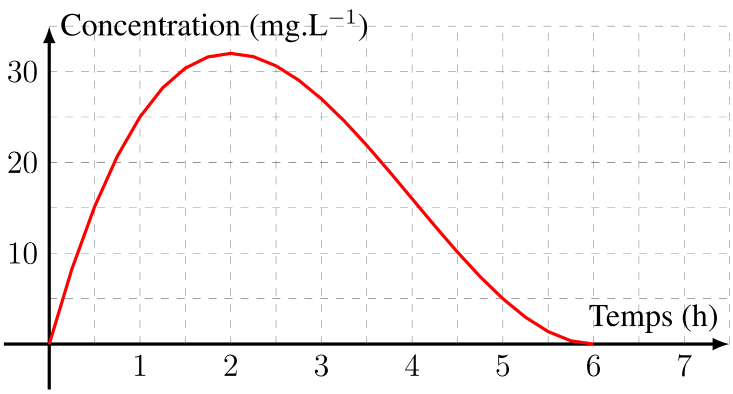
1. Donner le domaine de définition D de f
2. Que valent $f(-4)$, $f(-2)$ et $f(5)$?
3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur D.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < -2$ sur D.
5. Donner un réel ayant exactement 4 antécédents par f.

► Exercice 13

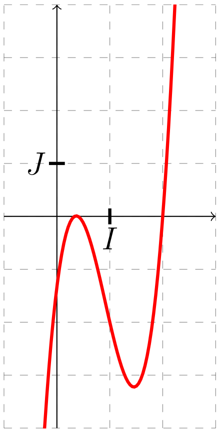
Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicamenteuse au temps $t = 0$, t étant exprimé en heures. Pour tout réel de $[0 : 6]$, la concentration du principe actif en mg.L^{-1}, t heures après l'injection est donnée par la fonction c définie par

$$c(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

Le médicament est efficace lorsque la concentration du principe actif est supérieure ou égale à 25 mg.L^{-1}. La courbe représentative de la fonction c est donnée ci-dessous.



1. Quelle est la concentration du principe actif après 30 minutes ? On utilisera le graphique ET le calcul
2. A partir de quel temps n'y a-t-il plus de principe actif ?
3. Justifier que pour tout réel t, $c(t) = t(t-6)^2$
4. Vérifier le résultat de la question 2 par le calcul.
5. Durant quelle période le médicament est-il efficace ?



▶ Exercice 14

On considère la fonction

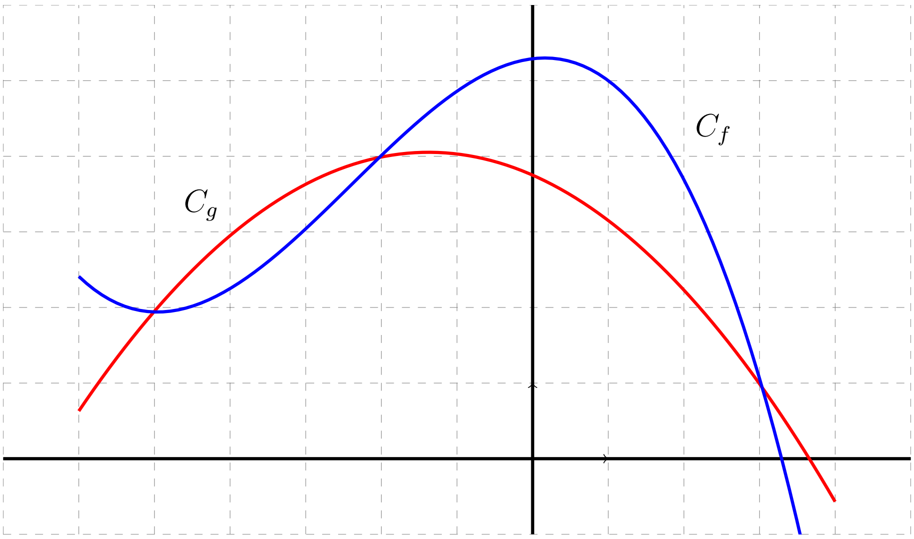
$$f : x \mapsto 5x^3 - \frac{41}{3}x^2 + 8x - \frac{4}{3}$$

définie sur $\mathbb{R}$. La courbe de cette fonction est représentée ci-contre.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$. Combien semble-t-on avoir de solutions ?
2. Montrer que $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f\left(\frac{2}{5}\right)$ et $f(2)$ valent 0.
3. Quelles sont les inconvénients d'une résolution graphique d'équation ?

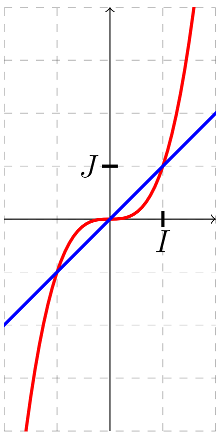
▶ Exercice 15

On a tracé ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-6{,}4]$



Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique

1. Déterminer graphiquement $f(-3)$ et $g(-1)$
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geqslant g(x)$



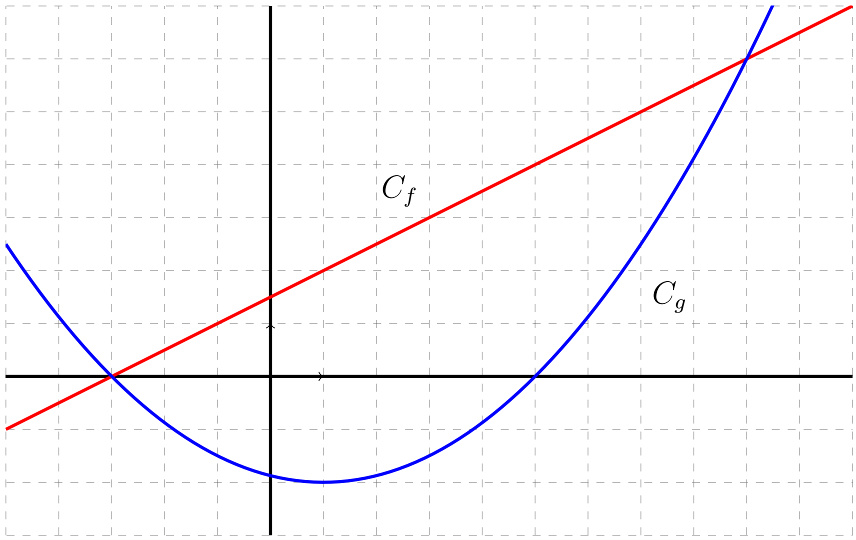
▶ Exercice 16

On considère les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^3$ définies sur $\mathbb{R}$. Les courbes de ces deux fonctions sont représentées ci-contre.

1. Associer à chaque courbe la fonction correspondante.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$
4. Retrouver le résultat de la question 2 par le calcul

► Exercice 17

On a tracé ci-dessous les courbes de deux fonctions f et g sur l'intervalle $[-5{,}11]$



1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $g(-1)$
2. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) < 0$
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) > g(x)$

3 Variations d'une fonction

► Exercice 18

Soit f une fonction strictement croissante sur $[1; 8]$. Comparer les images suivantes

$f(2)$ et $f(3)$	$f(5)$ et $f(1)$	$f(0.2)$ et $f(0.12)$
$f(\sqrt{2})$ et $f(2)$	$f(\pi)$ et $f(3)$	$f\left(\frac{8}{5}\right)$ et $f\left(\frac{5}{3}\right)$

► Exercice 19

Soit g une fonction strictement décroissante sur $[-4; 7]$. Comparer les images suivantes

$g(0)$ et $g(1)$	$g(7)$ et $g(-2)$	$g(-2)$ et $g(-3)$
$g(\sqrt{3})$ et $g(2)$	$g(-1)$ et $g(-\pi)$	$g\left(\frac{6}{7}\right)$ et $g\left(\frac{9}{8}\right)$

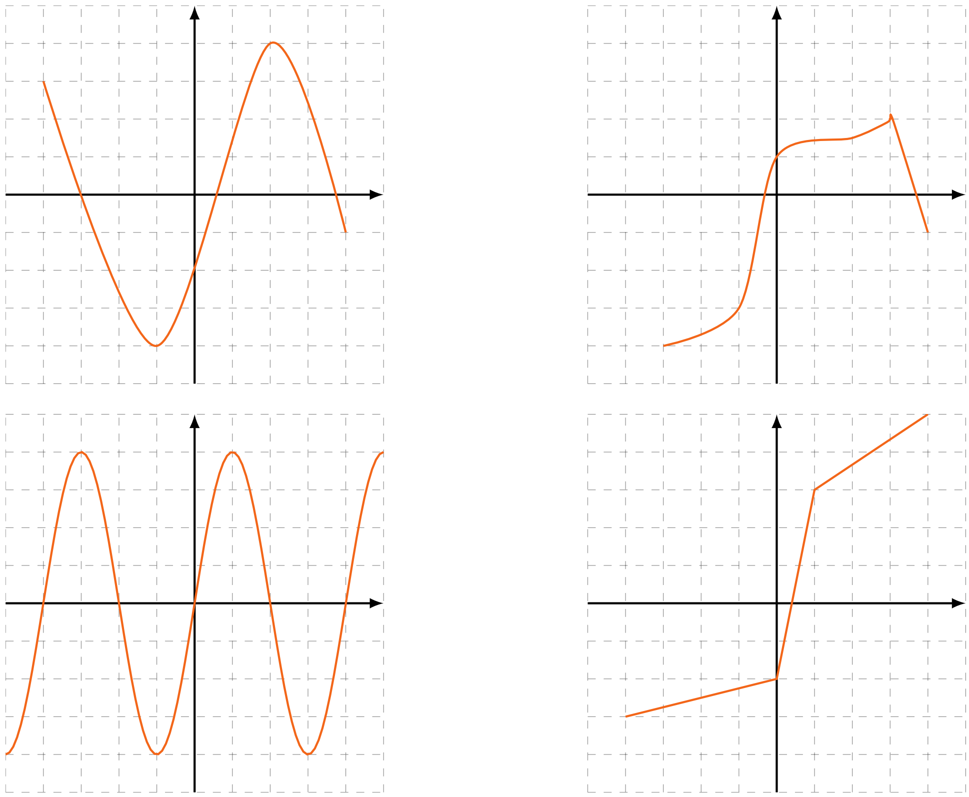
► Exercice 20

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. On sait que $f(1) = 0$ et $f(3) = 4$

1. Peut-on avoir $f(2) = -3$? Pourquoi ?
2. Peut-on avoir $f(2) = 5$? Pourquoi ?
3. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 4$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 21

Pour chacune des fonctions dont la courbe représentative est tracée ci-dessous, construire le tableau de variations.



► Exercice 22

Tracer la courbe représentative d'une fonction compatible avec le tableau de variations suivant

x	-5		-2		1		5		7
f	-2	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

► Exercice 23

On considère une fonction f dont le tableau de de variations est donné ci-après.

x	3		5		7		10
f	4	$\searrow$	-12	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Donner l'image de 5 par f.
3. Donner un antécédent de 7 par f.
4. Donner un encadrement de $f(8)$.

► Exercice 24

On considère une fonction h dont le tableau de de variations est donné ci-après.

x	-2		0		3		5
h	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	4

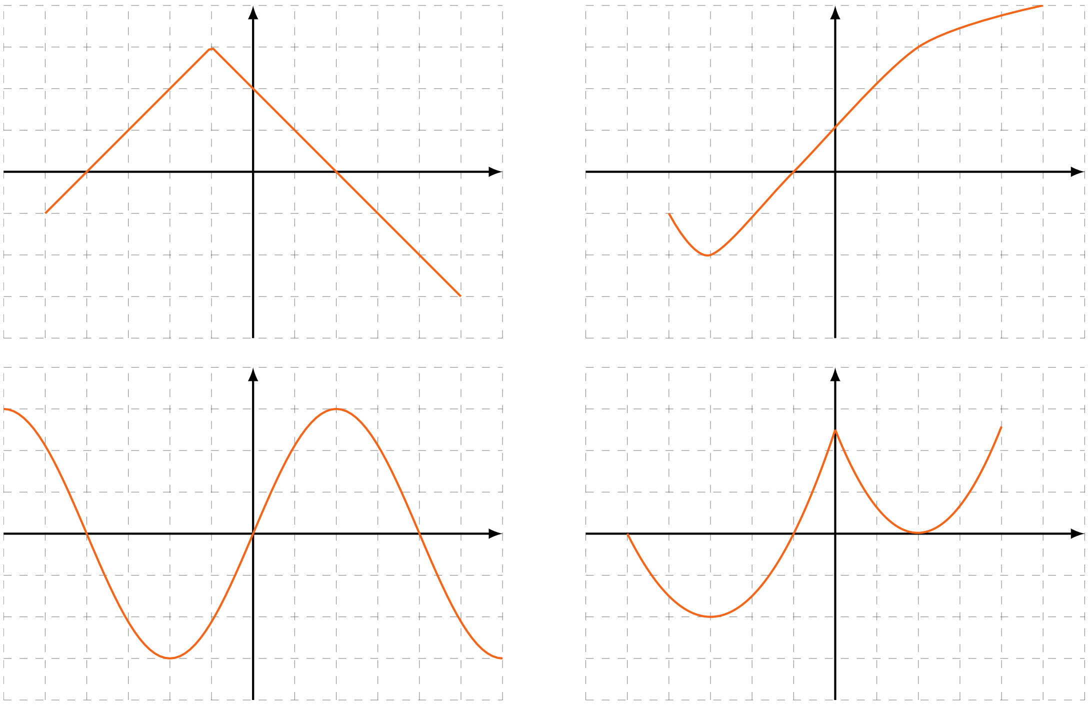
1. Quel est le domaine de définition D de h ?
2. Compléter, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes par $\geq$ ou $\leq$. Indiquer "impossible" lorsque l'on ne peut pas comparer les quantités.

$h(-2)\ldots\ldots h(0)$	$h(1)\ldots\ldots h(2)$	$h(-1)\ldots\ldots h(4)$
$h(-2)\ldots\ldots h(3)$	$h(0)\ldots\ldots h(3)$	$h(4)\ldots\ldots h(5)$
$h(1)\ldots\ldots h(4)$	$h(1)\ldots\ldots h(5)$	$h(-2)\ldots\ldots h(4)$

4 Signe d'une fonction

► Exercice 25

Construire le tableau de variations et de signes des fonctions suivantes, définies par leur courbe représentative.



▶ Exercice 26

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

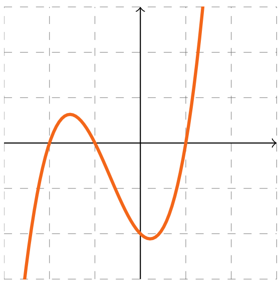
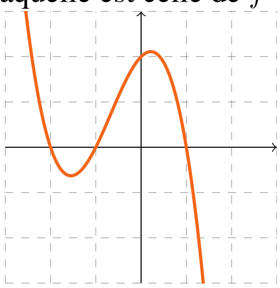
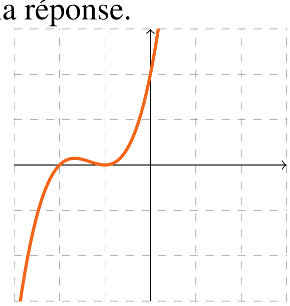
x	-15		-7		-3		8		15		21		22
Var.	4	↘	2	↗	7	↘	0	↘	-3	↗	0	↗	3
Signe													

1. Compléter le tableau de signes de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) \leqslant 0$ sur le domaine de définition de f.

▶ Exercice 27

On considère la fonction $f : x \mapsto (0{,}5 - 0{,}5x)(4 + 2x)(x + 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de signes de $f(x)$
2. Parmi les courbes suivants, laquelle est celle de f ? Justifier la réponse.

5 Extremum

▶ Exercice 28

Reprendre les fonctions des exercices 21 et 25 et déterminer graphiquement leurs extremums sur leur domaine de définition.

▶ Exercice 29

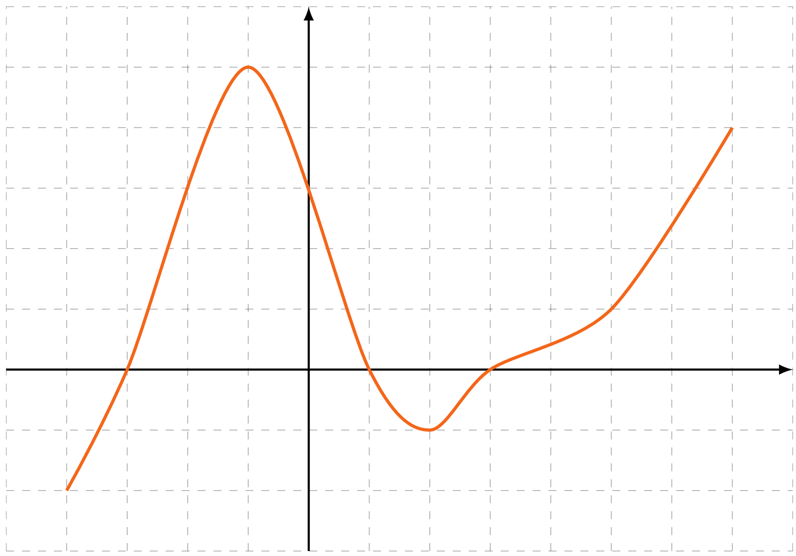
On considère une fonction h dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		2		3		5
h	4	↘	-5	↗	2	↘	0

1. Donner le domaine de définition D de h.
2. Déterminer le maximum de h sur D. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
3. Déterminer le minimum de h sur D. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
4. Déterminer le maximum de h sur $[2; 5]$. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
5. Déterminer le minimum de h sur $[3; 5]$. En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

► Exercice 30

On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous



1. Donner le domaine de définition D de f.
2. Construire le tableau de variations et de signe de f.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ sur D.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 3$ sur $[-4; 1]$.
5. Quel est le maximum de f sur D ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
6. Quel est le minimum de f sur D ? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
7. Quel est le maximum de f sur $[0; 7]$? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
8. Quel est le minimum de f sur $[0; 7]$? En quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?

6 Parité

► Exercice 31

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$
2. La fonction f est-elle paire ? impaire ?

► Exercice 32

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 7$

1. Calculer $f(2)$ et $f(-2)$. La fonction f est-elle impaire ?
2. Soit x un réel. Montrer que $f(-x) = f(x)$. Qu'en déduit-on sur la fonction f ?

► Exercice 33

Déterminer la parité des fonctions suivantes, définies sur le domaine de définition associé.

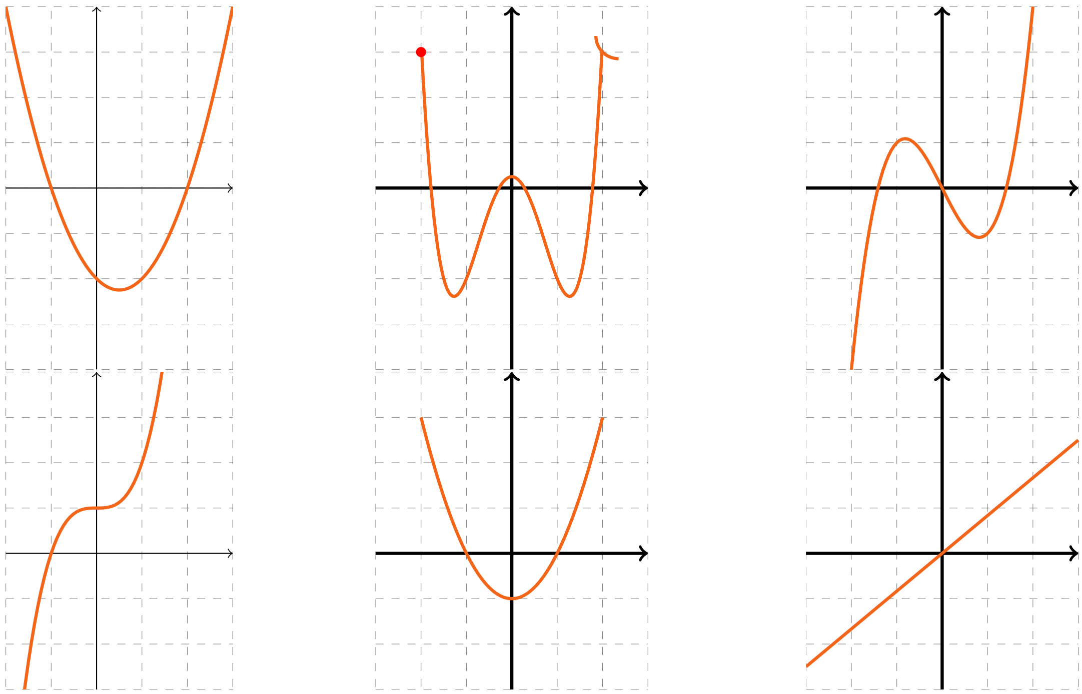
$f : x \mapsto x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $g : x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$h : x \mapsto x^2 + 1$ sur $[-3; 5]$ $\qquad$ $i : x \mapsto 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$

$j : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$ $\qquad$ $k : x \mapsto 2x^3 - 4x$ sur $\mathbb{R}$

► Exercice 34

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles sont la courbe d'une fonction paire ? D'une fonction impaire ?



► Exercice 35

Soit f une fonction paire. Compléter le tableau de variations et de signes de la fonction ci-dessous.

x	-8	$\cdots$	-4	-2	0	$\cdots$	$\cdots$	5	$\cdots$
Var.	5	0	-2	0	3				
Signe									

► Exercice 36

Soit g une fonction impaire. Compléter le tableau de variations et de signes de la fonction ci-dessous.

x	-9	$\cdots$	$\cdots$	-2	0	$\cdots$	3	5	$\cdots$
Var.	5	0	-2	4	0	$\ldots$			
Signe									