Généralités sur les fonctions

1 Vocabulaire

1.1 Définition et exemples

Définition 1 : Soit D une partie de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
Définir une fonction sur D, c'est associer à chaque réel x de D un **UNIQUE** nombre réel, noté $f(x)$.
D est appelé **domaine de définition** de f.

Notation 1.1. *On notera $f : x \mapsto f(x)$ pour la fonction qui à x associe $f(x)$.*

■ **Exemple 1 :** On considère $D = \left\{-1.2, 3, 0, \frac{7}{3}\right\}$.
On résume les informations d'une fonction f dans un tableau :

x	-1.2	3	0	$\frac{7}{3}$
$f(x)$	4	7	π	7

f est bien une fonction car chaque réel de D est associé à un unique réel de $\mathbb{R}$.
On a ainsi $f(-1.2) = 4$, $f(3) = 7$... ■

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$.
On a par exemple $g(0) = 2 \times 0 + 3 = 3$, $g(1) = 2 \times 1 + 3 = 5$... ■

1.2 Image, antécédents

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un domaine de définition D. Soit $x \in D$.
- On dit que $f(x)$ est L'image de x par f.
- On dit que x est UN antécédent de $f(x)$ par f.

R L'antécédent doit TOUJOURS appartenir au domaine de définition !

■ **Exemple 3 :** 4 est l'image de -1.2 par la fonction f donnée précédemment. 7 possède plusieurs antécédents par f : 3 et $\frac{7}{3}$. ■

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction g définie au paragraphe précédent.
- $g(0) = 3$. 3 est l'image de 0 par g. 0 est un antécédent de 3 par g.
- On cherche un antécédent de 7 par g. On cherche donc à résoudre l'équation $g(x) = 7$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 7 \\ 2x + 3 &= 7 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De plus, $2 \in \mathbb{R}$. 2 est donc un antécédent de 7 par g.

■

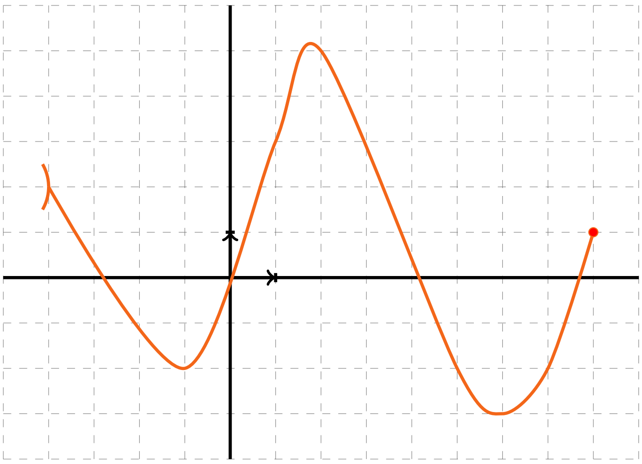
2 Représentation graphique

R Dans toute la suite, on se place dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

2.1 Courbe représentative

Définition 3 : Soit f une fonction et D son domaine de définition.
On appelle **représentation graphique** de f (ou courbe représentative de f) l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$, pour tout $x \in D$.
On note en général cette courbe C_f.

■ **Exemple 5 :** On trace la représentation graphique d'une certaine fonction h.



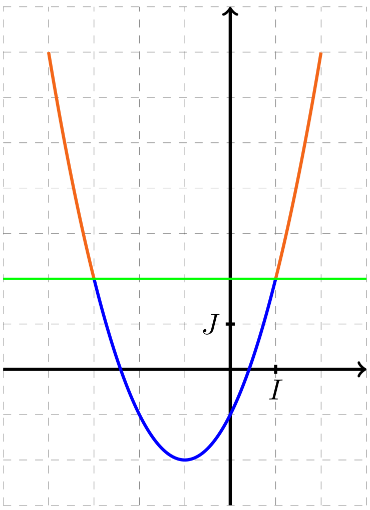
- Le domaine de définition de h est $]-4; 8]$.
- Le point de coordonnées $(-1; -2)$ est sur la courbe, ce qui signifie que $h(-1) = -2$.
- L'image de 1 par h est 3.
- -2 a trois antécédents par h : -1, 5 et 7. 6 n'a pas d'antécédent par h.

■

2.2 Résolutions graphiques

Equation $f(x) = k$ ou inéquation $f(x) \geqslant k$

■ **Exemple 6 :** Soit f définie sur $I = [-4; 2]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.



On donne la courbe représentative de f ci-contre.

Pour résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur I, c'est-à-dire déterminer les antécédents de 2 par f, on regarde les points de la courbe dont l'ordonnée vaut 2.
Les antécédents de 2 par f sont -3 et 1. Les solutions de $x^2 + 2x - 1 = 2$ sur I sont donc -3 et 1.

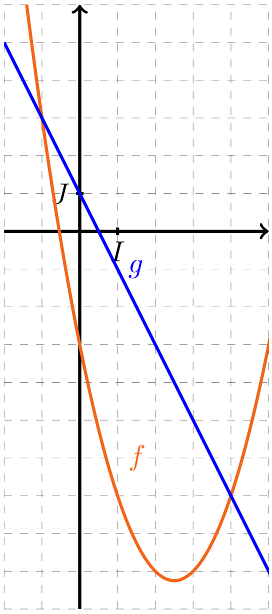
Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ sur I revient à déterminer l'ensemble des abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est supérieure ou égale à 2.

Dans notre cas, l'ensemble des solutions est $S = [-4; -3] \cup [1; 2]$.

■

Equation $f(x) = g(x)$ **ou inéquation** $f(x) \leqslant g(x)$

■ **Exemple 7 :** Soit f et g définies sur $I = [-2; 6]$ par $f(x) = x^2 - 5x - 3$ et $g(x) = -2x - 1$.



On donne les courbes représentatives de f et g ci-contre.

Pour résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur I, on cherche les x correspondants aux *points d'intersection* des courbes représentatives de ces deux fonctions
Ici, les courbes se croisent pour $x = -1$ et $x = 4$. Les solutions de $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire $x^2 - 5x - 3 = -2x - 1$ sur I sont donc -1 et 4.

Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ sur I revient à déterminer l'ensemble des abscisses pour lesquelles la courbe de f est *au-dessus* de celle de g.

Dans notre cas, l'ensemble des solutions est
$S = [-2; -1] \cup [4; 6]$.

■

3 Variations d'une fonction

3.1 Définitions

Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est croissante lorsque, pour tout a et b dans I, si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$. Autrement dit, f conserve l'ordre sur I.
- On dit que f est décroissante lorsque, pour tout a et b dans I, si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$. Autrement dit, f renverse l'ordre sur I.

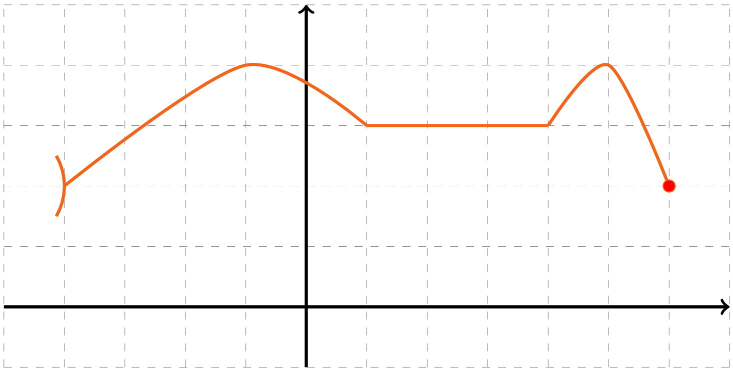
R Si les inégalités sont strictes, on parlera de fonction strictement croissantes ou décroissantes.

Définition 5 : Avec les mêmes notations, on dit que f est constante sur I si, pour tout a et b dans I, on a $f(a) = f(b)$

3.2 Interprétation graphique

Si la fonction est croissante sur un intervalle I, sa courbe représentative "monte" de gauche à droite. Si la fonction est décroissante, la courbe descend.
Si la courbe est horizontale, la fonction est constante sur l'intervalle correspondant.

■ **Exemple 8 :** On considère une fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



Le domaine de définition de f est $]-4;6]$.
f est croissante sur $]-4;-1]$, puis décroissante sur $[-1;1]$, puis constante sur $[1;4]$ puis croissante sur $[4;5]$, puis décroissante sur $[5;6]$ ■

3.3 Tableau de variation

On peut résumer les variations d’une fonction f dans un tableau de variations. Pour la courbe donnée précédemment, le tableau de variations se présente ainsi :

x	-4		-2		1		4		5		6
f	‖		4						4		
	‖ 2	↗		↘	3	→	3	↗		↘	2

La double barre en -4 traduit le fait que -4 n’est pas dans l’ensemble de définition.

■ **Exemple 9 :** Utilisation d’un tableau de variations. On considère une fonction f dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		0		2		5
f	2				0		
		↘	-1	↗		↘	-2

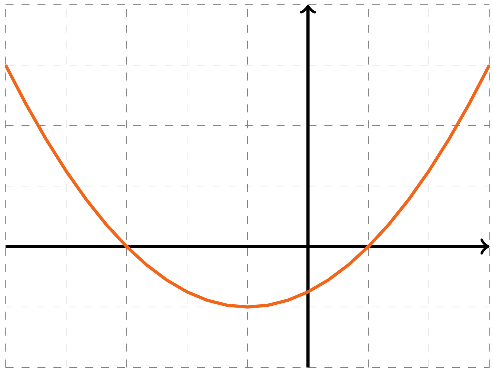
- Le domaine de définition se lit sur la première ligne : $D = [-4;5]$
- $f(-4) = 2$, $f(0) = -1$, $f(2) = 0$, $f(5) = -2$
- On souhaite encadrer $f(1)$. On sait que $1 \in [0;2]$ et f est croissante sur cet intervalle. On a donc $f(0) \leq f(1) \leq f(2)$, c’est-à-dire $-1 \leq f(1) \leq 0$.

■

4 Signe d’une fonction

R Il est également possible de faire un tableau de signes pour une fonction. Lorsque la fonction est définie par une expression algébrique, on peut procéder comme au chapitre précédent.
Graphiquement, cela revient à donner la position relative de la courbe par rapport à l’axe des abscisses.

■ **Exemple 10 :** On considère la fonction f définie sur et dont la courbe représentative dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



Son tableau de variations et de signe est le suivant :

x	-5		-3		-1		1		3
Variations	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2
Signe		$+$	0		$-$		0	$+$	

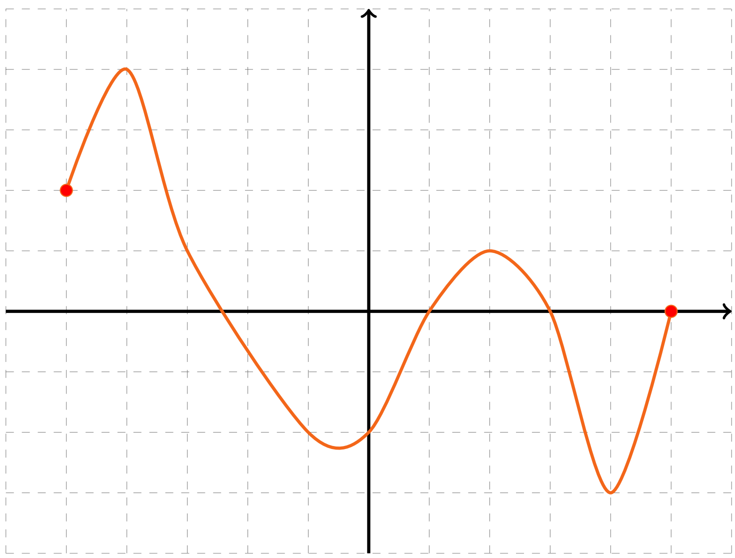
■

5 Extremum

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$

- On dit que f admet un minimum en a sur I si, pour tout x dans I, on a $f(a) \leq f(x)$
- On dit que f admet un maximum en a sur I si, pour tout x dans I, on a $f(a) \geq f(x)$
- On dit que f admet un extremum en a si f admet un minimum ou un maximum en a.

■ **Exemple 11 :** On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous



- Le domaine de définition de f est $D = [-5; 5]$.
- Le maximum de f sur D est atteint en -4 et vaut 4.

- Le minimum de f sur D est atteint en 4 et vaut -3.
- Le maximum de f sur $[0;4]$ est atteint en 2 et vaut 1.

■

6 Parité, Imparité

Définition 7 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$.On dit que D est symétrique par rapport à 0 si, pour tout $x \in D$, $-x \in D$.

■ **Exemple 12 :** $[-1;1]$ est symétrique par rapport à 0. $[-3;4]$" ne l'est pas. En effet, $4 \in [-3;4]$ mais $-4 \notin [-3;4]$ ■

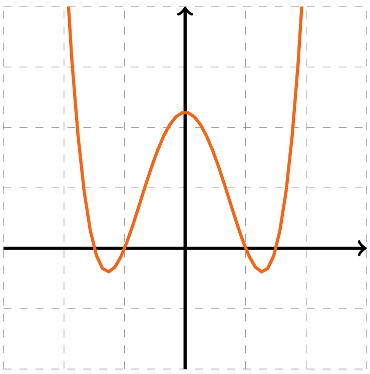
Définition 8 : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et f une fonction définie sur D.
- On dit que f est paire si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est impaire si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

■ **Exemple 13 :** La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$, définie sur $\mathbb{R}$ est paire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$ ■

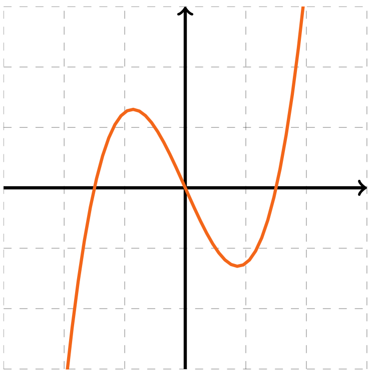
Propriété 1 : Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
- f est paire si et seulement si C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■ **Exemple 14 :** :

Courbe représentative d'une fonction paire



Courbe représentative d'une fonction impaire



■