Chapitre VII : Information chiffrée

1 Proportion et pourcentage

1.1 Proportion d'une sous-population

Définition 1 : La proportion, notée p, d'une sous-population de taille n dans une population de taille N vaut :

$$p = \frac{n}{N} = \frac{\text{Sous-effectif}}{\text{Effectif total}}$$

Pour exprimer cette proportion en pourcentage, on multiplie le nombre obtenu par 100.

■ **Exemple 1 :** Sur les 400 élèves de 1ère, 280 ont choisi de continuer les mathématiques.
La proportion d'élèves ayant continué les mathématiques est de $\dfrac{280}{400} = 0{,}7$. Cela représente 70% des élèves. ■

Propriété 1 : Soit p la proportion d'une sous-population dans une population de taille N. L'effectif de cette sous-population vaut

$$n = p \times N$$

■ **Exemple 2 :** Les jeunes de moins de 16 ans représentaient $1{,}27\%$ de la population française en 2018. Cette population s'élève à 67 186 638 habitants.

Notons n le nombre de jeunes de moins de 16 ans dans la population française. On a donc

$$n = 0{,}0127 \times 67186638 \simeq 853272$$

En 2018, il y avait 853272 jeunes de moins de 16 ans dans la population française. ■

1.2 Proportion échelonnée

Propriété 2 : A, B et C sont trois ensembles tels que $A \subset B \subset C$. On note
- p_{AB} la proportion de A dans B
- p_{BC} la proportion de B dans C.

Alors la proportion de A dans C vaut $p_{AC} = p_{AB} \times p_{BC}$.

Démonstration 1.1 : Appelons n_A, n_B et n_C les effectifs des populations A, B et C. On a alors

$$p_{AC} = \frac{n_A}{n_C} = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{n_B}{n_C} = p_{AB} \times p_{BC}$$

□

■ **Exemple 3 :** Dans un lycée, 45 % des élèves font un sport et un tiers d'entre eux font du badminton.
La proportion d'élèves du lycée faisant du badminton est donc $\dfrac{45}{100} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{15}{100} = 0{,}15$. Autrement dit, 15% des élèves du lycée font du badminton. ■

2 Evolution

2.1 Variation absolue et taux d'évolution

Définition 2 : Une grandeur est mesurée à deux instants. On appelle D sa valeur de départ, différente de 0, et A sa valeur d'arrivée.

- On appelle variation absolue la quantité $A - D$.
- On appelle variation relative ou taux d'évolution la quantité $t = \dfrac{A-D}{D}$

R Des variations négatives correspondent à une diminution. Des variations positives correspondent à une augmentation.

■ **Exemple 4 :** Le salaire d'un employé est passé de 1600 à 1700€.

- La variation absolue de ce salaire est 1700 - 1600 = 100 €.
- La variation relative de ce salaire est $\dfrac{1700-1600}{1600} = 0{,}0625$, ce qui correspond à une augmentation de 6.25%

■

R Attention aux parenthèses sur les calculatrices qui font le calcul sur une ligne !

2.2 Évolution

Propriété 3 : Soit t un réel supérieur ou égal à -1. On s'intéresse à l'évolution d'une valeur après une évolution de taux t. On note D la valeur de départ et A la valeur d'arrivée. On a alors

$$A = (1+t)D$$

Démonstration 2.1 : On a $t = \dfrac{A-D}{D} = \dfrac{A}{D} - \dfrac{D}{D} = \dfrac{A}{D} - 1$. Ainsi, $\dfrac{A}{D} = 1 + t$ et $A = (1+t)D$. □

Définition 3 : Le réel $CM = 1 + t$ est appelé coefficient multiplicateur de l'évolution de taux t.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "\times CM"] & A \end{tikzcd}$$

R Lorsque $CM < 1$, l'évolution est une diminution ou une baisse.
Lorsque $CM > 1$, l'évolution est une augmentation ou une hausse.

■ **Exemple 5 :** Une paire de chaussure à 50€ est en solde et son prix diminue de 12%. Son nouveau prix est de $50 \times \left(1 - \dfrac{12}{100}\right) = 50 \times 0.88 = 44$€. ■

■ **Exemple 6 :** La population de Mantes-la-Jolie était de 45000 habitants en 2016. Elle a ensuite augmenté de 1% en 2017, soit $45000 \times \left(1 + \dfrac{1}{100}\right) = 45000 \times 1.01 = 45450$ habitants. ■

3 Evolutions successives et réciproques

3.1 Evolutions successives

Propriété 4 : Pour calculer des évolutions successives, il faut multiplier les coefficients multiplicateurs relatifs à ces évolutions.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "\times CM_1 \times CM_2"'] & I \arrow[r, bend left, "\times CM_2"] & A \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 7 :** La population d'une ville de 50 000 habitants augmente de 10% une première année puis de 20% l'année suivante.

Après ces deux années, la population est de $50000 \times \left(1 + \dfrac{10}{100}\right) \times \left(1 + \dfrac{20}{100}\right) = 66000$.

Il y a donc 66 000 habitants après ces deux évolutions. ■

R On n'ajoute JAMAIS les augmentations en pourcentages !

Propriété 5 : Soit t_1 et t_2 deux évolutions. L'évolution t qui équivaut aux évolutions successives t_1 et t_2 est donné par :

$$t = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1$$

Démonstration 3.1 : On a en effet $1 + t = (1 + t_1)(1 + t_2)$, d'où le résultat. □

■ **Exemple 8 :** A quoi équivaut une augmentation de prix de 10% suivi d'une baisse de 10% ? Le coefficient multiplicateur associé à ces évolutions successives est

$$\left(1 + \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{-10}{100}\right) = 0.99$$

On retire alors 1 pour avoir le taux final, soit $0{,}99 - 1 = -0{,}01$.

Une augmentation du prix de 10% suivi d'une diminution du nouveau prix de 10% équivaut donc à une diminution du prix initial de 1%. ■

3.2 Evolution réciproque

Définition 4 : Une grandeur est mesurée à deux instants. On appelle D sa valeur de départ et A sa valeur d'arrivée. L'évolution réciproque de cette grandeur est l'évolution que la grandeur doit subir pour revenir à sa valeur de départ.

Propriété 6 : En conservant les mêmes notations, le taux dévolution réciproque vaut $\dfrac{D-A}{A}$.

■ **Exemple 9 :** Une paire de chaussures à 50€ voit son prix augmenter de 25%. Quelle doit être l'évolution pour que son prix revienne au prix de départ ?

On calcule d'abord le nouveau prix : $50 \times \left(1 + \dfrac{25}{100}\right) = 50 \times 1.2 = 62.5$.

On souhaite donc déterminer l'évolution pour que le prix repasse de 60 à 50 €. Ce taux vaut $\dfrac{50-62.5}{62.5} = -0.2$. Le taux d'évolution réciproque est donc de -0.2, soit une diminution de 20%. ■

Propriété 7 : Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse du coefficient multiplicateur de l'évolution directe.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, bend left, "\times CM"] & A \arrow[l, bend left, "\times \frac{1}{CM}"] \end{tikzcd}$$

■ **Exemple 10 :** Comment compenser une augmentation d'un prix de 15% ?

- Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 15% est $1 + \dfrac{15}{100}$ soit $1{,}15$
- Le coefficient réciproque est donc $\dfrac{1}{1{,}15}$
- Pour avoir le taux réciproque, on retire 1. $\dfrac{1}{15} - 1 \simeq -0{,}13$.

Pour compenser une hausse de 15%, il faut appliquer une diminution d'environ 13%. ■