Carré, Racine Carrée

1 Carré d'un réel

1.1 Rappels sur les carrés

Définition 1 : Le carré d'un nombre réel a, noté a^2, est le produit de a par lui-même.

$$a^2 = a \times a$$

■ **Exemple 1 :** Les carrés suivants sont à connaître par cœur !

$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$11^2 = 121$
$12^2 = 144$	$13^2 = 169$		

■

Propriété 1 : Pour tous réels a et b

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

■ **Exemple 2 :** Soit x un réel

$$(4x-7)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 = 16x^2 - 56x + 49$$

■

■ **Exemple 3 :** Soit x un réel.

$$(2x+3)^2 - (5x+1)^2 = (2x+3+5x+1)(2x+3-(5x+1)) = (7x+4)(-3x+2)$$

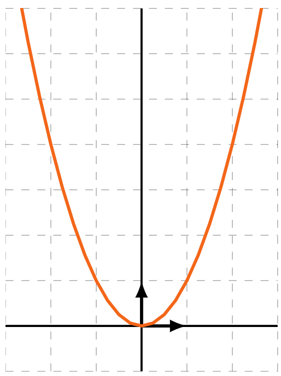
■

1.2 Fonction Carré

Définition 2 : On appelle fonction Carré la fonction qui, à tout réel x, associe x^2.

Propriété 2 : La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Signe		$+$	0	$+$	



Démonstration 1.1 : Soit a et b deux réels positifs tels que $a > b$.
Alors $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ qui est le produit de deux nombres positifs.
Ainsi, $a^2 - b^2 > 0$, d'où $a^2 > b^2$. La fonction carrée est bien strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De la même manière, soit c et d deux réels négatifs tels que $c < d$. $c^2 - d^2 = (c-d)(c+d)$ qui est négatif.
La fonction carrée est bien strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ □

■ **Exemple 4 :** Soit x un réel de l'intervalle $[3\,;\,7]$. On a donc $3 \leqslant x \leqslant 7$. 3 et 7 sont des réels positifs et la fonction Carré est croissante sur $[0; +\infty[$. Ainsi, on peut appliquer cette fonction à l'inégalité sans en changer le sens.

On a donc $3^2 \leqslant x^2 \leqslant 7^2$, c'est-à-dire $9 \leqslant x^2 \leqslant 49$. ■

■ **Exemple 5 :** Soit x un réel de l'intervalle $[-5\,;\,-2[$. On a donc $-5 \leqslant x < -2$. -5 et -2 sont des réels négatifs et la fonction Carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$. Ainsi, si on applique cette fonction à l'inégalité, cela en change le sens.

On a donc $(-5)^2 \geqslant x^2 > (-2)^2$, c'est-à-dire $25 \geqslant x^2 > 4$. ■

Propriété 3 : La fonction Carré est paire

2 Racine carrée d'un réel positif

2.1 Définition et propriétés

Définition 3 : Soit a un réel positif. On note $\sqrt{a}$ l'unique solution positive de l'équation $x^2 = a$.
$\sqrt{a}$ est le nombre positif qui, au carré, vaut a.

■ **Exemple 6 :** Puisque $12^2 = 144$, alors $\sqrt{144} = 12$ ■

■ **Exemple 7 :** $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$. ■

Propriété 4 : Soit a et b des réels positifs. Alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Démonstration 2.1 : On a $\sqrt{ab}^2 = ab$ et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab$. Les deux réels étant positifs, on a bien $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. □

■ **Exemple 8 :** $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = 5\sqrt{3}$ ■

2.2 Fonction Racine Carrée

Définition 4 : La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0; +\infty[$, qui à x associe $\sqrt{x}$

■ **Exemple 9 :** Soit g la fonction qui à x associe $\sqrt{(2x-4)(3x+9)}$. g est définie si et seulement si $(2x-4)(3x+9) \geqslant 0$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-4)(3x+9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le domaine de définition de g est donc $]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$

■

Propriété 5 : La fonction Racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

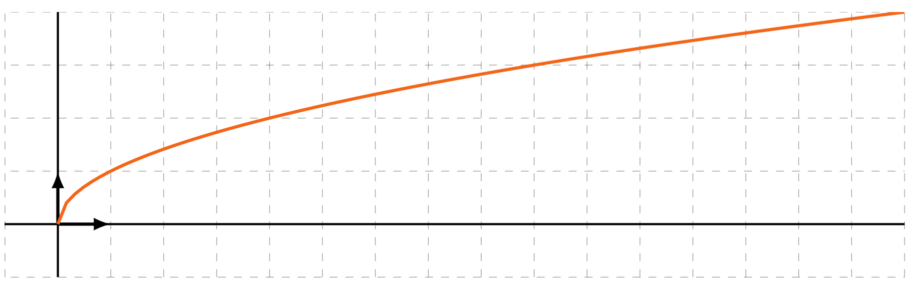
x	0		$+\infty$
Variation	0	$\nearrow$	
Signe	0	$+$	

Démonstration 2.2 : Soit a et b deux réels positifs tels que $a<b$.

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Le dénominateur est positif, par définition de la racine carrée. Le numérateur est négatif, puisque $a<b$.

Ainsi, si $a<b$, on a $\sqrt{a}<\sqrt{b}$. La fonction Racine carrée est strictement croissante. □



3 Résolution d'équations

Propriété 6 : Soit a un entier positif. Les solutions de l'équation $x^2=a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Démonstration 3.1 : $x^2=a\Leftrightarrow x^2-a=0\Leftrightarrow(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0\Leftrightarrow x=\sqrt{a}$ OU $x=-\sqrt{a}$ □

■ **Exemple 10 :** Les solutions de l'équation $x^2=9$ sont 3 et -3 ■

■ **Exemple 11 :** On souhaite résoudre l'équation $(2x-3)^2 = 25$

$$\begin{aligned}
(2x-3)^2 = 25 &\Leftrightarrow (2x-3)^2 - 25 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2x-3)^2 - 5^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (2x-3-5)(2x-3+5) = 0 \\
&\Leftrightarrow (2x-8)(2x+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x-8 = 0 \quad \text{OU} \quad 2x+2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x = 8 \quad \text{OU} \quad 2x = -2 \\
&\Leftrightarrow x = 4 \quad \text{OU} \quad x = -1
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-1; 4\}$ ■

Propriété 7 : Soit a un réel positif. L'unique solution de l'équation $\sqrt{x} = a$ est $x = a^2$.

■ **Exemple 12 :** L'unique solution de l'équation $\sqrt{x} = 4$ est $x = 16$ ■

4 Résolution d'inéquations

Propriété 8 : Soit a un entier positif.
- Les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant a$ sont les réels de l'intervalle $[-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$
- Les solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant a$ sont les réels de l'union d'intervalles $]-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}; +\infty[$

■ **Exemple 13 :** Les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 25$ sont $S = [-5; 5]$.
Les solutions de l'inéquation $x^2 \geqslant 64$ sont $S =]-\infty; -8[\cup [8; +\infty[$. ■

■ **Exemple 14 :** On souhaite résoudre l'inéquation $(4x+10)^2 \leqslant 36$

$$\begin{aligned}
(4x+10)^2 \leqslant 36 &\Leftrightarrow (4x+10)^2 - 36 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (4x+10)^2 - 6^2 \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (4x+10-6)(4x+10+6) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (4x+4)(4x+16) \leqslant 0
\end{aligned}$$

On construit un tableau de signe.

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$4x + 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x + 16$		$-$	0	$+$		$+$	
$(4x+4)(4x+16)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions est $S = [-4; -1]$

■